

Helsingin Yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

GMAR- ja StMAR-mallin yleistäminen
G-StMAR-malliksi

Savi Virolainen
23. toukokuuta 2018

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty		Laitos — Institution — Department	
Matemaattis-luonnontieteellinen		Matematiikan ja tilastotieteen laitos	
Tekijä — Författare — Author Savi Virolainen			
Työn nimi — Arbetets titel — Title GMAR- ja StMAR-mallin yleistäminen G-StMAR-malliksi			
Oppiaine — Läroämne — Subject Tilastotiede			
Työn laji — Arbetets art — Level Pro gradu -tutkielma		Aika — Datum — Month and year Toukokuu 2018	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages 53 s.
Tiivistelmä — Referat — Abstract <p>Erityisesti taloudellisissa ilmiöissä sekä niitä kuvaavissa aikasarjoissa esiintyy usein vaihtelua eri tilojen välillä, esimerkiksi markkinoiden vakauden heilahtelun aiheuttamana. Eri tilojen välillä vaihtelua selittämään kykeneviä aikasarjamalleja ovat muun muassa autoregressiiviset sekoitusmallit. Tällaisia ovat esimerkiksi GMAR-malli (<i>Gaussian Mixture Autoregressive</i>) ja StMAR-malli (<i>Student's t Mixture Autoregressive</i>), joihin perustuen tutkielmassa esitetään molempien piirteitä hyödyntävä G-StMAR-malli (<i>Gaussian and Student's t Mixture Autoregressive</i>).</p> <p>Autoregressiiviset sekoitusmallit voidaan ajatella kokoelmaksi lineaarisia autoregressiivisiä malleja, joista kutakin kutsutaan mallin komponentiksi. Kunkin komponentin ajatellaan kuvaavan kutakin ilmiössä esiintyvää tilaa. GMAR-mallissa komponenttien oletetaan olevan normaalisia autoregressiivisiä prosesseja, kun taas StMAR-mallissa ne ovat t-jakaumaan perustuvia, ehdollisesti heteroskedastisia autoregressiivisiä prosesseja. StMAR-mallin komponenttien ehdollisen varianssin riippuvuus samoista parametreista kuin ehdollinen odotusarvo voi kuitenkin olla rajoittava tekijä tapauksissa, joissa komponenttikohtainen ehdollinen odotusarvo on vahva, mutta ehdollinen varianssi heikko. Tästä syystä StMAR-malli yleistetään tutkielmassa G-StMAR-malliksi sallimalla osan sen komponenteista perustuvan GMAR-mallin käyttämiin normaalsiin autoregressiivisiin prosesseihin, joissa ehdollisen varianssin oletetaan olevan vakio.</p> <p>Tutkielmassa esitellään GMAR-malli ja StMAR-malli, ja määritellään niiden pohjalta G-StMAR-malli. Lisäksi osoitetaan, että GMAR-mallin ja StMAR-mallin houkuttelevat teoreettiset ominaisuudet, kuten ergodisuus ja stationaarisen jakauman tunteminen, periytyvät ilmeisellä tavalla myös G-StMAR-mallille. Mallien esittelemisen jälkeen tutkielmassa kerrotaan lyhyesti, kuinka esitetyt mallit voidaan estimoida kaksivaiheista menetelmää käyttäen, miten malleille voidaan valita sopivat asteet, kuinka kvantiiliresiduaaleja voidaan hyödyntää mallin sopivuuden tarkastelemisessa ja miten taustalla olevan prosessin tulevia havaintoja voidaan ennustaa simulaatiomenettelyllä.</p> <p>Tutkielman empiirisessä osiossa tutkitaan, millaisiksi G-StMAR-mallin parametrit estimoituvat pohjana olevaan StMAR-malliin verrattuna, ja lisäksi mallien ennustetarkkuuksia vertaillaan toisiinsa. Esimerkkiaineistona käytetään Standard & Poor's 500 osakemarkkinaindeksin päivittäistä volatilitteettia kuvaavaa, ajanjakson 3.1.2000-20.5.2016 kattavaa aikasarjaa. Tutkielman tulosten perusteella StMAR- ja G-StMAR-mallien ennustetarkkuuksien välillä ei voida sanoa olevan juurikaan eroa, mutta joissakin tapauksissa voidaan G-StMAR-malliin siirtymällä välttää StMAR-mallin parametrien estimaatteja koskevia ongelmia.</p>			
Avainsanat — Nyckelord — Keywords Epälineaariset aikasarjamallit, Autoregressiiviset sekoitusmallit, GMAR, StMAR, G-StMAR			
Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited Kumpulan tiedekirjasto			
Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information			

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Mallit	3
2.1	Lineaarinen autoregressiivisen malli	3
2.2	Autoregressiivinen sekoitusmalli	4
2.3	GMAR-malli	5
2.4	StMAR-malli	9
2.5	G-StMAR-malli	12
3	Kaksivaiheinen estimointi	16
4	Diagnostiikka ja mallinvalinta	18
4.1	Kvantiiliresiduaalit	18
4.2	Informaatiokriteerit	20
4.3	G-StMAR-mallin rakentaminen	21
5	Ennustaminen	22
6	Empiirinen esimerkki	23
6.1	Estimointi	24
6.2	Ennustetarkkuuden vertailu	29
7	Päätelmät	34
	Viitteet	36
	Liite A Todistuksia	39
	Liite B Täydentävää kuvamateriaalia	50

1 Johdanto

Monia ilmiöitä koskevissa aikasarjoissa on lineaariset mallit todettu riittämättömiksi kuvaamaan niiden taustalla olevaa systemaattista rakennetta ja satunnaisvaihtelua. Tällaisia tapauksia esiintyy usein esimerkiksi taloudellisissa aikasarjoissa, joissa ilmiön voidaan monesti ajatella vaihtelevan erilaisen taloudellisten tilojen, eli regiimien välillä. Eroja tilojen välillä voivat aiheuttaa esimerkiksi poliittikka, talouskriisit, markkinoiden vakauden vaihtelu tai odotukset talouden kehityksestä. On siis ollut syytä kehittää sellaisia aikasarjamalleja, jotka ovat ominaisuuksiltaan kykeneviä selittämään mallinnettavissa ilmiöissä esiintyviä regiiminvaihdoksia. Tällaisia ovat esimerkiksi Limin ja Tongin (1980) autoregressiivinen kynnysmalli, Chanin ja Tongin (1986) pehmeän siirtymän malli sekä autoregressiiviset sekoitusmallit, joita ovat esimerkiksi Lin ja Wongin (2000 ja 2001) MAR-, LMAR- ja LMARX-mallit, Glasbeyn (2001) esittämä ja Kalliovirran ym. (2015) laajemmin tutkima GMAR-malli sekä Meitzin ym. (2018) StMAR-malli. Kiinnostuksemme kohteena ovat edellä mainituista kaksi jälkimmäistä, joihin perustuen ehdotamme molempien piirteitä hyödyntävää, yleisempää G-StMAR-mallia.

Autoregressiivinen sekoitusmalli voidaan ajatella kokoelmaksi lineaarisia autoregressiivisiä malleja, joista kutakin kutsutaan sekoituskomponentiksi, komponenttimalliksi tai lyhyesti vain komponentiksi. Taustalla olevat prosessit generoivat havaintoja aina jostakin sekoituskomponentistaan, jonka määräävä mekanismi on eri malleilla erilainen. Tarkastelemissamme GMAR-, StMAR- ja G-StMAR-malleissa havainnon generoivan komponentin voidaan ajatella valikoituvan satunnaisesti sekoitussuhteiden määräämillä todennäköisyyksillä.

GMAR-mallissa komponentteina käytettävät autoregressiiviset (AR) prosessit perustuvat normaali jakaumaan, eikä niille sallita minkäänlaista ehdollisen varianssin vaihtelua. Koska GMAR-malli kuitenkin sallii eri komponenttien väliset regiiminvaihdokset, pystyy se autoregressiivisen rakenteen lisäksi selittämään jonkin verran myös mallinnettavissa ilmiöissä esiintyvää ehdollista heteroskedastisuutta. Monissa finanssiaikasarjoissa esiintyy toisaalta joskus voimakastakin regiimikohtaista ehdollisen varianssin vaihtelua, jonka selittämiseen eivät tavanomaiset AR-mallit kykene. Ratkaisuksi Meitz ym. (2018) ehdottavat Studentin t-jakaumaan perustuvia, ehdollisesti heteroskedastisia autoregressiivisiä prosesseja komponentteinaan hyödyntävää StMAR-mallia. Teoreettisten tarkasteluiden lisäksi he havainnollistavat mallinsa omi-

naisuuksia myös empiirisesti ennustamalla Standard & Poor's 500 (S&P 500) osakemarkkinaindeksin volatiliteettiä.

Vaikka Meitz ym. (2018) näyttävät StMAR-mallin olevan kykenevä mallintamaan vahvaakin ehdollista heteroskedastisuutta omaavaa, regiimien välillä vaihtelevaa ilmiötä, on siltäkin rajoitteensa. StMAR-mallin komponenttien ehdollinen varianssi nimittäin riippuu prosessin menneistä arvoista samojen parametrien kautta kuin ehdollinen odotusarvo. Tämä voi olla rajoittava tekijä tapauksissa, joissa regiimikohtainen ehdollinen odotusarvo on vahva, mutta ehdollinen varianssi heikko (tai toisinpäin). Vastaamme ongelmaan G-StMAR-mallilla, jossa osa sekoituskomponenteista voi olla GMAR-mallin käyttämiä tavanomaisia normaalijakaumaan perustuvia AR-prosesseja ja osa StMAR-mallin hyödyntämiä ehdollisesti heteroskedastisia prosesseja. GMAR-tyyppisten komponenttien salliminen osoittautuu varsin luontevaksi yleistykseksi StMAR-mallille, ja lisäksi käy ilmi, että monet GMAR- ja StMAR-mallin teoreettiset ominaisuudet periytyvät luonnollisella tavalla myös G-StMAR-mallille.

Loppu tutkielmasta on järjestelty seuraavasti. Kappaleessa 2 esitetään kaikki tutkielmassa tarkasteltavat mallit, joita ovat lineaarinen AR-malli, GMAR-malli, StMAR-malli ja G-StMAR-malli. Kolmen jälkimmäisen osalta tarkastellaan määritelmän esittämisen lisäksi myös teoreettisia ominaisuuksia sekä suurimman uskottavuuden (SU) estimaattorin asymptotiikkaa. Kappaleessa 3 kuvaillaan, miten edellä mainitut mallit voidaan estimoida numeerisesti kaksivaiheista menetelmää käyttäen. Kappaleessa 4 esitetään, miten kvanttiliresiduaaleja ja informaatiokriteereitä voidaan käyttää esitettyjen mallien sopivuuden arvioimisessa ja mallinvalinnassa, ja miten G-StMAR-mallille voidaan valita sopivat eri komponenttien lukumäärät. Viidennessä kappaleessa näytetään, kuinka G-StMAR-prosessin tulevia havaintoja voidaan ennustaa riippumattomien simulaatioiden avulla. Kappaleessa 6 G-StMAR-malli sovitetaan S&P 500 osakemarkkinaindeksin päivittäistä volatiliteettia kuvaavaan aikasarjaan, ja sen estimoitumista sekä ennustustarkkuutta vertaillaan StMAR-malliin. Viimeisessä kappaleessa tiivistetään G-StMAR-mallin sekä teoreettinen että käytännön anti StMAR-malliin verrattuna. Liitteessä A perehdytään G-StMAR-mallin teoreettisiin ominaisuuksiin yksityiskohtaisemmin, ja muun muassa todistetaan kappaleessa 2.5 esitetty G-StMAR-mallia koskevat tulokset. Liitteessä B on kerättynä tutkielman empiiristä osiota täydentävää kuvamateriaalia.

2 Mallit

2.1 Lineaarinen autoregressiivisen malli

Lineaarinen p :n asteen AR-prosessi (*Autoregressive*) määritellään yhtälöllä

$$y_t = \varphi_0 + \sum_{i=1}^p \varphi_i y_{t-i} + \sigma \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

missä σ on aidosti positiivinen keskihajontaparametri ja termit ε_t ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden odotusarvo on nolla ja varianssi yksi.¹ AR-prosessin voidaan näyttää olevan (sekä heikosti että vahvasti) stationaarinen, mikäli sen parametrit toteuttavat ehdon

$$1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i z^i \neq 0 \text{ kaikilla } z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq 1. \quad (2.2)$$

Stationaarisuusehdon voimassa ollessa prosessille voidaan johtaa odotusarvo $\mu = \varphi_0 / (1 - \sum_{i=1}^p \varphi_i)$ (Hamilton 1994, s.58-59). Merkitään stationaarisesta AR-prosessista muodostettua p -ulotteista satunnaisvektoria $\mathbf{y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})$, ja sen AR-parametreista $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ sekä varianssista σ^2 riippuvaa kovarianssimatriisia symbolilla $\mathbf{\Gamma}$ ($p \times p$). Kuten prosessin määrittely-yhtälöstä voidaan päätellä, normaalisten virhetermien tapauksessa satunnaisvektori \mathbf{y}_t noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on $\mu \mathbf{1}_p$ ($\mathbf{1}_p = (1, \dots, 1)$ ($p \times 1$)) ja kovarianssimatriisi Toeplitz-muotoa oleva $\mathbf{\Gamma}$. Mikäli hajonta σ määritellään sopivasti prosessin menneisyydestä riippuvaksi, saadaan vastaava tulos myös Studentin t-jakautuneiden virhetermien tapaukselle (Meitz ym. 2018).

Edellä mainittujen p -ulotteisten jakaumien tiheysfunktioita tarvitaan myöhemmin määriteltävien mallien sekoissuhteissa. Käytännön laskuissa tarvitaan kuitenkin vain kovarianssimatriisin $\mathbf{\Gamma}$ käänteismatriisia $\mathbf{\Gamma}^{-1}$. Koska matriisin kääntäminen on laskennallisesti raskas operaatio, voidaan mallien estimointia nopeuttaa käyttämällä Galbraithin ja Galbraithin (1974) johtamaa

¹Jatkossa tällaisiin satunnaismuuttujiin viitataan lyhyesti merkinnällä IID(0, 1) (*Independent and Identically Distributed*).

kaavaa käänteismatriisille $\mathbf{\Gamma}^{-1}$, jolle saadaan esitys

$$\mathbf{\Gamma}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} (U'U - V'V), \quad (2.3)$$

missä

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\varphi_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\varphi_{p-1} & \dots & -\varphi_1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } V = \begin{bmatrix} \varphi_p & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_{p-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \varphi_1 & \dots & \varphi_{p-1} & \varphi_p \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

ovat $p \times p$ Toeplitz-matriiseja.

2.2 Autoregressiivinen sekoitusmalli

Tarkastellaan tutkielmassa käsiteltäviä autoregressiivisiä sekoitusmalleja yleisesti. Olkoon y_t , $t = 1, 2, \dots$ reaaliarvoinen aikasarja ja \mathcal{F}_{t-1} satunnaismuuttujien $\{y_{t-j}, j > 0\}$ generoima σ -algebra. Autoregressiivisen sekoitusmallin ehdollinen tiheysfunktio (ehdolla prosessin menneisyys) määritellään yhtälöllä

$$f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} f_m(y_t | \mathcal{F}_{t-1}), \quad (2.5)$$

missä M on komponenttien lukumäärä ja $\alpha_{m,t}$ sekä $f_m(y_t | \mathcal{F}_{t-1})$ ovat m :nen komponentin sekoitussuhde ja ehdollinen tiheysfunktio. Sekoitussuhteiden oletetaan olevan \mathcal{F}_{t-1} -mitallisia, positiivisia ja toteuttavan rajoite $\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} = 1$ kaikilla t .

Saadaksemme paremman käsityksen edellä kuvatun mallin taustalla olevasta prosessista, tarkastellaan sitä vielä toisessa muodossa. Määritellään jono M -ulotteisia (ei-havaittavia) satunnaisvektoreita $s_t = (s_{t,1}, \dots, s_{t,M})$ ($t = 1, 2, \dots$) siten, että kullakin t , yksi sen komponenteista saa arvon yksi ja loput saavat arvon nolla. Oletetaan, että satunnaismuuttujat $\varepsilon_{m,t}$ ovat IID(0, 1)-jakautuneita ja riippumattomia² σ -algebrasta \mathcal{F}_{t-1} . Oletetaan lisäksi, että s_t

²Satunnaismuuttujan X sanotaan olevan riippumaton σ -algebrasta \mathcal{F} , jos sen generoima σ -algebra $\sigma(X)$ ja \mathcal{F} ovat riippumattomia.

ja $\varepsilon_{m,t}$ ovat riippumattomia ehdolla \mathcal{F}_{t-1} , ja että kaikilla $m = 1, \dots, M$ pätee ehdollinen todennäköisyys $\mathbb{P}(s_{m,t} = 1 \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \alpha_{m,t}$. Tällöin prosessille saadaan määrittely-yhtälö

$$y_t = \sum_{m=1}^M s_{t,m}(\mu_{m,t} + \sigma_{m,t}\varepsilon_{m,t}), \quad (2.6)$$

missä hajonnat $\sigma_{m,t} > 0$ ovat \mathcal{F}_{t-1} -mitallisia,

$$\mu_{m,t} = \varphi_{m,0} + \sum_{i=1}^{p_m} \varphi_{m,i} y_{t-i}, \quad m = 1, \dots, M, \quad (2.7)$$

ja p_m on m :nen komponentin autoregressiivinen aste. Määrittely-yhtälö (2.6) voidaan siis tulkita siten, että prosessi generoi kunkin havainnon jostakin sekoituskomponentistaan omaan historiaansa perustuvilla, sekoitussuhteiden $\alpha_{m,t}$ määräämillä todennäköisyyksillä. Generoitunut havainto määräytyy valikoitunutta komponenttia vastaavan ehdollisen odotusarvon $\mu_{m,t}$, ehdollisen varianssin $\sigma_{m,t}^2$ sekä satunnaissokin $\varepsilon_{m,t}$ perusteella. Prosessin ehdollisen tiheysfunktion voidaan edellä eritellyin oletuksin todeta olevan yhtälössä (2.5) esitetyn tyyppinen sekoitus komponenttiensa ehdollisista tiheysfunktioista.

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi jatkossa oletetaan $p_m = p$ kaikilla $m = 1, \dots, M$. Yleisyyttä ei kuitenkaan menetetä, sillä aina voidaan valita $p = \max\{p_1, \dots, p_M\}$, ja rajoittaa kunkin komponenttimallin ylimää räisiä asteita vastaavat AR-parametrit nol laksi. Erilaisia sekoitusmalleja saadaan määrittelemällä sekoitussuhteet tai komponentteina käytettävät lineaariset prosessit eri tavoin. GMAR-mallissa sekoituskomponentit ovat kappaleessa 2.1 määritellyjä AR-prosesseja, jolloin ehdollinen varianssi $\sigma_{m,t}^2$ on vakio σ_m^2 , kun taas StMAR-mallissa sekoituskomponentit ovat kappaleessa 2.4 määriteltäviä AR-prosesseja, jolloin $\sigma_{m,t}^2$ riippuu prosessin menneisyydestä. G-StMAR-mallissa osa komponenteista on sellaisia kuin GMAR-mallissa ja osa sellaisia kuin StMAR-mallissa.

2.3 GMAR-malli

GMAR-mallissa (*Gaussian Mixture Autoregressive*) yhtälön (2.6) termit $\varepsilon_{m,t}$ oletetaan standardinormaalijakautuneiksi ja hajonta $\sigma_{m,t}$ t :stä riippumatto-

maksi kaikilla $m = 1, \dots, M$. Sen ehdollinen tiheysfunktio on siis muotoa

$$f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2) = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \sigma_m^{-1} \phi\left(\frac{y_t - \mu_{m,t}}{\sigma_m}\right), \quad (2.8)$$

missä merkintä $n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2)$ tarkoittaa yksiulotteisen normaali-jakauman tiheysfunktioita yhtälön (2.7) mukaisella odotusarvolla $\mu_{m,t}$ ja varianssilla σ_m^2 , ja $\phi(\cdot)$ on standardinormaali-jakauman tiheysfunktio. AR-parametrien $\varphi_{m,1}, \dots, \varphi_{m,p}$ oletetaan toteuttavan stationaarisuusehdon (2.2) kaikilla $m = 1, \dots, M$.

Määritellään seuraavaksi GMAR-mallin sekoitussuhteet. Olkoon $\xi_{m,t}$ mallin m :ttä sekoituskomponenttia vastaava AR(p)-prosessi ja $\boldsymbol{\xi}_{m,t} = (\xi_{m,t}, \dots, \xi_{m,t-p+1})$. Kappaleen 2.1 perusteella tiedetään, että satunnaisvektori $\boldsymbol{\xi}_{m,t}$ noudattaa p -ulotteista normaali-jakaumaa tiheysfunktiona

$$n_p(\boldsymbol{\xi}_{m,t}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m) = (2\pi)^{-p/2} \det(\boldsymbol{\Gamma}_m)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi}_{m,t} - \mu_m \mathbf{1}_p)' \boldsymbol{\Gamma}_m^{-1} (\boldsymbol{\xi}_{m,t} - \mu_m \mathbf{1}_p)\right\}, \quad (2.9)$$

missä $\mu_m \mathbf{1}_p$ on m :nen komponentin AR-parametrien ja $\boldsymbol{\Gamma}_m$ AR-parametrien sekä varianssiparametrin funktio, kuten kappaleessa 2.1 on esitetty. Olkoon $\alpha_m \in (0, 1)$, $m = 1, \dots, M$, joukko tuntemattomia parametreja, joille pätee $\sum_{m=1}^M \alpha_m = 1$. Merkitään $\mathbf{y}_{t-1} = (y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$ ($p \times 1$) ja määritellään sekoitussuhteet $\alpha_{m,t}$ yhtälöllä

$$\alpha_{m,t} = \frac{\alpha_m n_p(\mathbf{y}_{t-1}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m)}{\sum_{n=1}^M \alpha_n n_p(\mathbf{y}_{t-1}; \mu_n \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_n)}. \quad (2.10)$$

Määritelmän suorana seurauksena ne toteuttavat rajoitteen $\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} = 1$. GMAR-mallin sekoitussuhteet ovat näin ollen eräänlaisia parametreilla α_m painotettuja suhdelukuja, joiden suuruus riippuu p :stä edeltävästä havainnosta komponenttien mukaisten tiheysfunktioiden (2.9) kautta.

GMAR-mallissa yhtälön (2.6) termit $\varepsilon_{m,t}$ noudattavat standardinormaali-jakaumaa ja komponenttikohtainen ehdollinen varianssi $\sigma_{m,t}^2$ on vakio σ_m^2 . Yhtälöstä (2.6) nähdään, että GMAR-mallin ehdollinen odotusarvo on

$$E[y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \mu_{m,t} = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \left(\varphi_{m,0} + \sum_{i=1}^p \varphi_{m,i} y_{t-i} \right), \quad (2.11)$$

ja ehdollinen varianssi

$$\text{Var}[y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \sigma_m^2 + \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \left(\mu_{m,t} - \sum_{n=1}^M \alpha_{n,t} \mu_{n,t} \right)^2. \quad (2.12)$$

Merkitään autoregressiivistä astetta p olevaa, M :n sekoituskomponentin mallia lyhyesti GMAR(p, M), ja kerätään mallin tuntemattomat parametrit vektoreihin $\boldsymbol{\vartheta}_m = (\varphi_{m,0}, \boldsymbol{\varphi}_m, \sigma_m^2)$, jossa $\sigma_m > 0$ ($m = 1, \dots, M$). Mallin kaikki parametrit kerätään dimensiota $((M(p+3) - 1) \times 1)$ olevaan vektoriin $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\vartheta}_1, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_M, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1})$. Viimeinen sekoitussuhdeparametri α_M on jätetty pois, koska se saadaan rajoitteesta $\sum_{m=1}^M \alpha_m = 1$.

Sen lisäksi, että Kalliovirta ym. (2015) tarkastelevat yksityiskohtaisesti Glasbeyn (2001) esittämää GMAR-mallia yleisessä p :n asteen tapauksessa, he osoittavat, että siihen perustuva prosessi $\mathbf{y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})$ ($p \times 1$) on ergodinen Markovin ketju \mathbb{R}^p :ssä, jonka stationaarisen jakauman tiheysfunktio

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=1}^M \alpha_m n_p(\mathbf{y}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m) \quad (2.13)$$

on sekoitus M :stä p -ulotteisesta normaalijakaumasta vakiosekoitussuhteilla α_m . Moniulotteisen normaalijakauman tunnettujen ominaisuuksien nojalla sen kaikki momentit tiedetään äärellisiksi. Kalliovirta ym. (2015) toteavat, että prosessin ollessa stationaarinen myös kaikkien $1 \leq q \leq p+1$ ulotteisten (mutta ei korkeampi ulotteisten) satunnaisvektoreiden (y_t, \dots, y_{t-q+1}) marginaalijakaumat ovat sekoituksia q -ulotteista normaalijakaumista. Stationaarisen jakauman tunteminen lisää ymmärrystä prosessista, mutta tulos on hyödyllinen muun muassa myös siksi, että se mahdollistaa eksaktin log-uskottavuusfunktion käytön estimoinnissa. Lisäksi se antaa parametreille α_m mielekkään tulkinnan ehdottomina todennäköisyyksinä sille, että havainto y_t generoituu vastaavan GMAR-prosessin m :nestä sekoituskomponentista.

Indeksoidaan havaittu aikasarja $y_{-p+1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_T$ ja oletetaan alkuarvot stationaarisiksi. GMAR-mallin log-uskottavuusfunktio on

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \log \left(\sum_{m=1}^M \alpha_m n_p(\mathbf{y}_0; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m) \right) + \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.14)$$

missä

$$\begin{aligned} l_t(\boldsymbol{\theta}) &= \log \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2) \right) \\ &= \log \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} (2\pi\sigma_m^2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{2\sigma_m^2} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mikäli alkuarvoja ei ole kohtuullista olettaa stationaarisiksi, voidaan uskottavuuspäätely perustaa ehdolliseen log-uskottavuusfunktioon, jossa ehdollistetaan alkuarvojen suhteen. Ehdollisen log-uskottavuusfunktion lauseke saadaan pudottamalla ensimmäinen termi yhtälön (2.14) oikealta puolelta.

Jotta malli olisi identifioituva, täytyy sen sekoituskomponenteille määrätä tietty järjestys, koska muutoin järjestystä vaihtamalla voitaisiin samaan malliin päätyä eri parametriarvoilla. Edellisen ollessa itseasiassa riittävä ehto GMAR-mallin identifioituvuudelle, riittää tämän takaamiseksi olettaa, että mallin parametreille pätevät ehdot

$$\alpha_1 > \dots > \alpha_M > 0 \text{ ja } \boldsymbol{\vartheta}_i = \boldsymbol{\vartheta}_j \text{ vain jos } 1 \leq i = j \leq M. \quad (2.16)$$

Kalliovirta ym. (2015) näyttävät, että stationaarisilla alkuarvoilla on identifioituvan mallin SU-estimaattori $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ eräiden teknisten ehtojen pätiessä vahvasti tarkentuva, eli se konvergoi todelliseen parametriarvoon $\boldsymbol{\theta}_0$ todennäköisyydellä yksi. Lisäksi he toteavat, että mikäli tavanomaiset informaatiomatriisia ja Hessen matriisia koskevat SU-estimaattorin asymptoottiseen normaalisuuteen vaadittavat oletukset toteutuvat, pätee SU-estimaattorille sen tavanomainen asymptoottinen jakaumatulos, eli

$$T^{1/2} \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0 \right) \xrightarrow{d} N \left(0, \left(\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[-T^{-1} \partial^2 L_T(\boldsymbol{\theta}_0) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}' \right] \right)^{-1} \right). \quad (2.17)$$

Tällöin suurilla havaintomäärillä voidaan SU-estimaattorin jakaumaa approksimoida normaalijakaumalla, jonka odotusarvo on $\boldsymbol{\theta}_0$ ja kovarianssimatriisi havaitun informaatiomatriisin $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}) = -\partial^2 L_T(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'$ käänteismatriisi $\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ pisteessä $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Matriisin $\mathcal{J}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ diagonaalialkioiden neliöjuuria voidaan täten vaadittujen oletusten toteutuessa käyttää estimoitujen parametriarvojen approksimaatiivisina keskivirheinä.

2.4 StMAR-malli

Useista autoregressiivisistä sekoitusmalleista poiketen StMAR-mallin (*Student's t Mixture Autoregressive*) sekoituskomponentteina ei käytetä tavanomaisia AR-prosesseja, joissa virhetermien oletetaan olevan riippumattomia sekä toisistaan että prosessin menneisyydestä. Sen sijaan niiden oletetaan noudattavan Studentin t-jakaumaa siten, että niille sallitaan ARCH-tyyppinen³ (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) ehdollisen varianssin vaihtelu.

Otetaan d -ulotteiselle t-jakaumalle, ja sen tiheysfunktioille käyttöön merkinnät ja parametointi

$$t_d(\mathbf{y}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}, \nu) = C_d(\nu) \det(\boldsymbol{\Gamma})^{-1/2} \left(1 + \frac{(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})}{\nu - 2} \right)^{-(d+\nu)/2}, \quad (2.18)$$

missä $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$,

$$C_d(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi^d (\nu - 2)^d} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (2.19)$$

$\nu > 2$ on vapausasteparametri⁴ ja $\Gamma(\cdot)$ on gammafunktio. Parametointi on tavanomaisesta poikkeava, mutta se mahdollistaa parametrin $\boldsymbol{\mu}$ ($d \times 1$) tulkitsemisen odotusarvona ja parametrin $\boldsymbol{\Gamma}$ ($d \times d$) (positiivisesti definiittinä) kovarianssimatriisina.

Määritellään seuraavaksi StMAR-mallin sekoituskomponentteina käytettävä ehdollisesti heteroskedastinen autoregressiivinen prosessi, jonka yksityiskohdaisempiin tarkasteluihin perehdytään Meitzin ym. (2018) julkaisemattomassa käsikirjoituksessa. Oletetaan, että yhtälön (2.1) määrittelemän AR-prosessin parametrit toteuttavat ehdon (2.2), ja että termit ε_t noudattavat yksiulotteista t-jakaumaa tiheysfunktiona $t_1(0, 1, \nu + p)$. Merkitään $\mathbf{y}_{t-1} = (y_{t-1}, \dots, y_{t-p})$ ($p \times 1$) ja korvataan yhtälön (2.1) keskihajontaparametri σ sen t :stä riippuvalla vastineella σ_t , joka määritellään yhtälöllä

$$\sigma_t^2 = \frac{\nu - 2 + (\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}_p)' \boldsymbol{\Gamma}^{-1} (\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu} \mathbf{1}_p)}{\nu - 2 + p} \sigma^2, \quad (2.20)$$

³Tarkoitamme tällä prosessin ehdollisen varianssin riippuvan äärellisestä määrästä sen edeltäviä havaintoja.

⁴Oletus $\nu > 2$ takaa toisen momentin äärellisyyden.

missä $\sigma^2 > 0$ on tuntematon varianssiparametri, ja p -ulotteisen t-jakauman odotusarvo $\mu \mathbf{1}_p$ ja kovarianssimatriisin käänteismatriisi $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ ovat kuten kapaleessa 2.1 ja yhtälöissä (2.3) ja (2.4) on esitetty. Tuloksena olevaa prosessia voidaan luonnehtia AR(p)-ARCH(p)-prosessiksi.

StMAR-mallin ehdollinen tiheysfunktio on

$$\begin{aligned} f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) &= \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} t_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_{m,t}^2, \nu_m + p) \\ &= \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} C_1(\nu_m + p) \sigma_{m,t}^{-1} \left(1 + \frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{(\nu_m + p - 2) \sigma_{m,t}^2} \right)^{-(1+\nu_m+p)/2}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

missä $\nu_m > 2$ on tuntematon vapausasteparametri, $\mu_{m,t}$ kuten yhtälössä (2.7) ja kunkin komponentin ehdolliseksi varianssiksi tulkittava $\sigma_{m,t}^2$ määräytyy yhtälöstä (2.20) siten, että siinä esiintyvät parametrit ovat kunkin komponentin mukaiset.

Sekoitusasteet määritellään samaan tapaan kuin GMAR-mallille, mutta koska komponentteja vastaavat autoregressiiviset prosessit perustuvat nyt normaalijakauman sijasta t-jakaumaan, hyödynnetään niissä vastaavasti p -ulotteisten t-jakaumien tiheysfunktioita. Määrittely-yhtälöksi saadaan täten

$$\alpha_{m,t} = \frac{\alpha_m t_p(\mathbf{y}_{t-1}; \mu_m \mathbf{1}_p, \mathbf{\Gamma}_m, \nu_m)}{\sum_{n=1}^M \alpha_n t_p(\mathbf{y}_{t-1}; \mu_n \mathbf{1}_p, \mathbf{\Gamma}_n, \nu_n)}, \quad (2.22)$$

missä tuntemattomille parametreille $\alpha_m \in (0, 1)$ pätee $\sum_{m=1}^M \alpha_m = 1$ ja sekoituskomponentteja vastaavat kovarianssimatriisit $\mathbf{\Gamma}_m$ ovat yhtälöiden (2.3) ja (2.4) mukaiset. Autoregressiivistä astetta p olevaa M :n sekoituskomponentin mallia merkitään StMAR(p, M), ja sen parametrit kerätään vektoriin $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$, jossa $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\vartheta}_1, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_M, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1})$ $((M(p+3) - 1) \times 1)$ on kuten GMAR-mallissa ja $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_M)$ $(M \times 1)$ sisältää vapausasteparametrit.

StMAR-mallissa yhtälön (2.6) termit $\varepsilon_{m,t}$ oletetaan t-jakautuneiksi ja ehdolliset varianssit $\sigma_{m,t}^2$ yhtälön (2.20) mukaisiksi. Prosessin ehdolliseksi odotusarvoksi saadaan

$$\mathbb{E}[y_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \mu_{m,t} = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \left(\varphi_{m,0} + \sum_{i=1}^p \varphi_{m,i} y_{t-i} \right), \quad (2.23)$$

ja ehdolliseksi varianssiksi

$$\text{Var}[y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \sigma_{m,t}^2 + \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \left(\mu_{m,t} - \sum_{n=1}^M \alpha_{n,t} \mu_{n,t} \right)^2. \quad (2.24)$$

Sekoitussuhteita lukuunottamatta StMAR-mallin ehdollinen odotusarvo on siis samanlainen kuin GMAR-mallissa. Mallien ehdollisissa variansseissa on toisaalta enemmän eroa, sillä StMAR-mallissa yhtälön (2.12) aikainvariantti varianssiparametri σ_m^2 on korvattu sen ARCH-tyyppisellä vastineella $\sigma_{m,t}^2$.

Meitz ym. (2018) näyttävät, että heidän kehittämällään StMAR-mallilla on GMAR-mallin tapaan sekoitussuhteiden erityisestä rakenteesta johtuen houkuttelevia teoreettisia ominaisuuksia. He toteavat prosessin $\mathbf{y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})$ olevan ergodinen Markovin ketju \mathbb{R}^p :ssä ja osoittavat, että sen stationaarisen jakauman tiheysfunktio

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=1}^M \alpha_m t_p(\mathbf{y}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m, \nu_m) \quad (2.25)$$

on sekoitus M :stä p -ulotteisesta t -jakaumasta vakiosekoitussuhteilla α_m . Studentin t -jakauman ominaisuuksien nojalla sen kaikki kertalukua $\min\{\nu_1, \dots, \nu_M\}$ pienemmät momentit ovat olemassa. Kuten GMAR-mallin tapauksessa, ovat myös stationaarisen StMAR-prosessin $1 \leq q \leq p+1$ ulotteiset reunajakaumat q -ulotteisten t -jakaumien sekoituksia, ja sekoitussuhdeparametri α_m voidaan tulkita ehdottomaksi todennäköisyydeksi sille, että prosessi generoi havainnon sen m :nestä sekoituskomponentista.

Kun havaittu aikasarja on $y_{-p+1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_T$ ja alkuarvot stationaarisia, StMAR-mallin log-uskottavuusfunktioksi saadaan

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \log \left(\sum_{m=1}^M \alpha_m t_p(\mathbf{y}_0; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m, \nu_m) \right) + \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}), \quad (2.26)$$

missä

$$\begin{aligned} l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) &= \log \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} t_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_{m,t}^2, \nu_m + p) \right) \\ &= \log \left(\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \frac{C_1(\nu_m + p)}{\sigma_{m,t}} \left(1 + \frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{(\nu_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2} \right)^{-(1+\nu_m+p)/2} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Alkuarvojen stationaarisuutta epäiltäessä voidaan pudottaa ensimmäinen termi yhtälön (2.26) oikealta puolelta ja käyttää syntynyttä ehdollista loguskottavuusfunktioa (ehdolla alkuarvot).

Mallin identifioituvuuden takaamiseksi riittää olettaa, että sen parametrit toteuttavat ehdon

$$\alpha_1 > \dots > \alpha_M > 0 \text{ ja } (\boldsymbol{\vartheta}_i, \nu_i) = (\boldsymbol{\vartheta}_j, \nu_j) \text{ vain jos } 1 \leq i = j \leq M, \quad (2.28)$$

mikä käytännössä vain estää sen, ettei mallin komponentteja voida uudelleenjärjestää siten, että samaan malliin päädytään eri parametriarvoilla. Meitz ym. (2018) osoittavat, että eräiden teknisten ehtojen pätiessä ja alkuarvojen ollessa stationaarisia, identifioituvan StMAR-mallin SU-estimaattori $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ on vahvasti tarkentuva. Viitaten yksityiskohdissa Kalliovirran ym. artikkeliin vuodelta 2016, he toteavat lisäksi, että mikäli SU-estimaattorin tavanomaiset asymptoottiseen normaalisuuteen vaadittavat oletukset toteutuvat, pätee asymptoottinen jakaumatulos (2.17) myös StMAR-mallin SU-estimaattorille. Tällöin havaitun informaatiomatriisin $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = -\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'$ käänteismatriisin $\mathcal{J}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})^{-1}$ diagonaalialkoiden neliöjuuria pisteessä $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = (\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ voidaan käyttää estimaattien approksimatiivisina keskivirheinä.

2.5 G-StMAR-malli

StMAR-mallissa on mallinnettavissa ilmiöissä esiintyvää voimakasta ehdollista heteroskedastisuutta pyritty huomioimaan GMAR-mallia paremmin määrittelemällä sen komponenteille ehdollinen varianssi, joka riippuu AR-parametrien kautta prosessin menneisyydestä. Tämä riippuvuus voi toisaalta olla rajoittava tekijä tapauksissa, joissa joillakin regiimeillä on vahva ehdollinen odotusarvo, mutta heikko ehdollinen varianssi (tai toisinpäin). Tällöin vahvan ehdollisen odotusarvon edellyttämät itseisarvoltaan suuret AR-kertoimet osaltaan pakottavat myös ehdollista varianssia voimakkaaksi. Kompensoidakseen AR-kertoimien voimistavaa vaikutusta todellisuudessa heikkoon ehdolliseen varianssiin, estimoituvat kyseisten komponenttien vapausasteet tällöin suuriksi, sillä kuten yhtälöstä (2.20) nähdään, vapausasteiden kasvaessa StMAR-komponentin ehdollinen varianssi lähestyy vakiota σ_m^2 . Koska vapausasteiden kasvaessa t-jakautuneiden virhetermien jakauma alkaa lisäksi muistuttaa muodoltaan normaalijakaumaa, on luontevaa yleistää StMAR-malli sal-

limalla osalle sen komponenteista GMAR-tyyppinen rakenne, tuloksena G-StMAR-malli (*Gaussian and Student's t Mixture Autoregressive*).

G-StMAR-mallissa osan sekoituskomponenteista oletetaan siis olevan normaalisia AR-prosesseja kuten GMAR-mallissa, ja loppujen StMAR-mallin käyttämiä t-jakaumaan perustuvia ehdollisesti heteroskedastisia prosesseja. Monet GMAR- ja StMAR-mallien teoreettiset ominaisuudet yleistyvät tälle niiden yhdistelmäksi luonnehdittavalle mallille siten vain pienin muutoksin. Tarvittavat todistukset ja yksityiskohtaisemmat tarkastelut on koottu liitteeseen A.

Olkoon M_1 normaalisten ja M_2 t-jakaumaan perustuvien sekoituskomponenttien lukumäärä, $M = M_1 + M_2$ ja p mallin autoregressiivinen aste. Kerätään G-StMAR(p, M_1, M_2)-mallin parametrit vektoriin $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$, jossa $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\vartheta}_1, \dots, \boldsymbol{\vartheta}_M, \alpha_1, \dots, \alpha_{M-1})$ $((M(p+3) - 1) \times 1)$ on kuten GMAR ja StMAR malleissa, ja $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{M_1+1}, \dots, \nu_M)$ $(M_2 \times 1)$ sisältää StMAR-komponenttien vapausasteparametrit. Parametrien oletetaan toteuttavan samanlaiset rajoitteet kuin StMAR- ja GMAR-malleissa, eli $\alpha_m \in (0, 1)$, $\sum_{m=1}^M \alpha_m = 1$, $\sigma_m > 0$ kaikilla $m = 1, \dots, M$ ja $\nu_m > 2$ kaikilla $m = M_1 + 1, \dots, M$. Lisäksi kunkin komponenttimallin AR-parametrien oletetaan toteuttavan komponenttien stationaarisuuden takaava ehto (2.2).

G-StMAR-mallin ehdollinen tiheysfunktio on

$$f(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_{m,t} n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_{m,t} t_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_{m,t}^2, \nu_m + p), \quad (2.29)$$

missä $n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2)$ ja $t_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_{m,t}^2, \nu_m + p)$ sekä kyseisten jakaumien parametrit ovat kuten yhtälöissä (2.8) ja (2.21). G-StMAR-prosessi voidaan esittää myös yhtälön (2.6) mukaisesti valitsemalla komponentteja $1, \dots, M_1$ vastaavien termien $\varepsilon_{m,t}$ jakaumaksi standardinormaalijakauman ja ehdolliseksi variansseiksi $\sigma_{m,t}^2$ vakioparametrit σ_m^2 . Komponenteille $M_1 + 1, \dots, M$ puolestaan valitaan termien $\varepsilon_{m,t}$ jakaumaksi t-jakauma, jonka tiheysfunktio on $t_1(0, 1, \nu_m + p)$, ja ehdolliseksi variansseiksi yhtälön (2.20) mukaiset prosessin menneisyydestä riippuvat $\sigma_{m,t}^2$:t. Komponenttikohtainen ehdollinen odotusarvo $\mu_{m,t}$ on kaikille komponenteille yhtälön (2.7) mukainen.

Eräänlaisena GMAR- ja StMAR-mallien yhdistelmänä G-StMAR-mallin se-

koitussuhteet määritellään odotetulla tavalla. Koska sen komponentteina on niin normaali- ja t-jakaumaan kuin myös t-jakaumaan perustuvia prosesseja, esiintyy sen sekoitussuhteissakin molempien jakaumien p -ulotteisia tiheysfunktioita. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi määritellään kaikille $m \in \{1, \dots, M\}$ funktio

$$h_m(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) := \begin{cases} n_p(\mathbf{y}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m), & \text{kun } m \in \{1, \dots, M_1\}, \\ t_p(\mathbf{y}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m, \nu_m), & \text{kun } m \in \{M_1 + 1, \dots, M\}, \end{cases} \quad (2.30)$$

missä p -ulotteiset tiheysfunktio $n_p(\mathbf{y}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m)$ ja $t_p(\mathbf{y}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m, \nu_m)$ määritellään samoin kuin yhtälöissä (2.10) ja (2.22). Mallin sekoitussuhteille saadaan esitys

$$\alpha_{m,t} = \frac{\alpha_m h_m(\mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})}{\sum_{n=1}^M \alpha_n h_n(\mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})}. \quad (2.31)$$

Sekoitussuhteiden erityisestä rakenteesta johtuen GMAR- ja StMAR-mallien tapaan myös G-StMAR-mallin tapauksessa Markovin ketju $\mathbf{y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})$ ($p \times 1$) on ergodinen, ja sen stationaarinen jakauma tunnetaan. Kuten mallin määritelmän perusteella voi odottaa, on \mathbf{y}_t :n stationaarinen jakauma sekoitus p -ulotteisista normaali- ja t-jakaumista, ja sen tiheysfunktio on

$$f(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_m n_p(\mathbf{y}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_m t_p(\mathbf{y}; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m, \nu_m). \quad (2.32)$$

Moniulotteisten normaali- ja t-jakaumien tunnettujen ominaisuuksien nojalla sen kaikki kertalukua $\min\{\nu_{M_1+1}, \dots, \nu_M\}$ pienemmät momentit ovat äärellisenä olemassa. Lisäksi stationaarisen G-StMAR-prosessin kaikki dimensiota $1 \leq q \leq p+1$ olevat reunajakaumat ovat q -ulotteisten normaali- ja t-jakaumien sekoituksia. Niin ikään parametrille α_m saadaan myös GMAR- ja StMAR-malleista tuttu tulkinta ehdottomana todennäköisyytenä sille, että prosessi generoi havainnon sen m :stä sekoituskomponentista.

G-StMAR-prosessin ehdolliseksi odotusarvoksi saadaan yhtälöiden (2.6) ja (2.7) sekä mallin määritelmän perusteella

$$\mathbb{E}[y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \mu_{m,t} = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \left(\varphi_{m,0} + \sum_{i=1}^p \varphi_{m,i} y_{t-i} \right), \quad (2.33)$$

ja ehdolliseksi varianssiksi

$$\text{Var}[y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_{m,t} \sigma_m^2 + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_{m,t} \sigma_{m,t}^2 + \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \left(\mu_{m,t} - \sum_{n=1}^M \alpha_{n,t} \mu_{n,t} \right)^2. \quad (2.34)$$

Ehdollinen odotusarvo on näin ollen sekoitussuhteita lukuunottamatta samanlainen kuin GMAR- ja StMAR-mallien tapauksissa. Ehdollisessa varianssissa on sen sijaan ehdollisista odotusarvoista riippuvan termin lisäksi sekä GMAR-komponenttien ajan suhteen vakioista että StMAR-komponenttien ajassa vaihtelevista ehdollisista variansseista riippuvat termit.

Indeksöidään havaittu aikasarja $y_{-p+1}, \dots, y_0, y_1, \dots, y_T$ ja oletetaan alkuarvot y_{-p+1}, \dots, y_0 stationaarisiksi. G-StMAR-mallin log-uskottavuusfunktio on

$$L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \log \left(\sum_{m=1}^{M_1} \alpha_m n_p(\mathbf{y}_0; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_m t_p(\mathbf{y}_0; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_m, \nu_m) \right) + \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}), \quad (2.35)$$

missä

$$l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \log \left(\sum_{m=1}^{M_1} \alpha_{m,t} n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_{m,t} t_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_{m,t}^2, \nu_m + p) \right) \quad (2.36)$$

ja $n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2)$ sekä $t_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_{m,t}^2, \nu_m + p)$ ovat kuten GMAR- ja StMAR-mallien log-uskottavuusfunktioissa. Mikäli alkuarvojen stationaarisuus ei vaikuta kohtuulliselta oletukselta, saadaan niihin ehdollistava ehdollinen log-uskottavuusfunktio pudottamalla yhtälön (2.35) oikealta puolelta ensimmäinen termi pois.

Stationaariset alkuarvot ja mallin identifioituvuus olettaen G-StMAR-mallin SU-estimaattori on vahvasti tarkentuva. G-StMAR-malli on toisaalta identifioituva, kunhan sen komponentteja ei voida uudelleenjärjestää siten, että samaan malliin voidaan päätyä eri parametriarvoilla. Identifioituvuuden ta-

kaava ehto on siten muotoa

$$\alpha_1 > \dots > \alpha_{M_1} > 0, \alpha_{M_1+1} > \dots > \alpha_M > 0 \text{ ja } \boldsymbol{\vartheta}_i = \boldsymbol{\vartheta}_j \text{ vain jos jokin} \\ \text{ehdoista (1) } 1 \leq i = j \leq M, \text{ (2) } i \leq M_1 < j, \text{ (3) } i, j > M_1 \text{ ja } \nu_i \neq \nu_j \\ \text{toteutuu.} \quad (2.37)$$

Vahvan tarkentuvuuden lisäksi olisi mielekäästä todeta yleisin oletuksin myös SU-estimaattorin $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ asympoottinen normaalisuus. Kalliovirta ym. (2016) osoittavat edellä mainitun tuloksen tavanomaisin askelin moniulotteiselle GMVAR-mallille, mutta yleisluontoisuutensa vuoksi todistus voidaan käytännössä (vaaditut oletukset olettaen) yleistää myös G-StMAR-mallille. He osoittavat todistuksessa vaadittujen oletusten (Kalliovirta ym. 2016, lemmat 1-3) pätevän GMVAR-mallille, mutta nämä oletukset ovat kuitenkin hankalia osoittaa todeksi G-StMAR-mallille, eikä niitä käsitellä tässä tutkielmassa. Mikäli on kuitenkin valmis olettamaan SU-estimaattorin asympoottiseen normaalisuuteen vaadittavat yleiset ehdot niitä tarkistamatta, voidaan tavanomaiseen tapaan havaitun informaatiomatriisin käänteismatriisin $\mathcal{J}^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = [-\partial^2 L(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) / \partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}']^{-1}$ diagonaalialkioiden neliöjuuria pisteessä $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = (\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ käyttää approksimatiivisina keskivirheinä parametrien estimaateille.

3 Kaksivaiheinen estimointi

Log-uskottavuusfunktioiden monimutkaisuudesta johtuen GMAR-, StMAR- ja G-StMAR (lyhyesti GSt)-mallien parametrien suurimman uskottavuuden estimointia ei ole mahdollista tehdä analyttisesti, vaan joudutaan turvautumaan numeerisiin menetelmiin. Numeerista estimointia puolestaan hankaloittaa sekoitusmalleille luonteenomainen log-uskottavuusfunktion monihuippuisuus. Tällöin numeerisiin maksimointiongelmiin monesti käytettävät gradienttiperusteiset algoritmit eivät sellaisenaan sovi kovin hyvin mallin estimointiin, sillä ne konvergoivat tyypillisesti vain johonkin aloituspisteen lähellä olevaan lokaaliin maksimiin.

Useiden sekoitusmallien (esim. Li ja Wong, 2000 ja 2001) estimoinnissa on ollut suosittua käyttää iteratiivista EM-algoritmia (Redner ja Walker 1984), jota voidaan hyödyntää tilanteissa, joissa kaikkea estimoinnin kannalta oleellista dataa ei havaita (sekoitusmallien tapauksessa sitä, mistä sekoituskomponentista mikäkin havainto on generoitunut, eli yhtälön (2.6) satunnais-

muuttujia $s_{1,t}, \dots, s_{M,t}$). Johtuen sekoitussuhteiden monimutkaisesta riippuvuudesta AR-parametreista, on EM-algoritmin soveltaminen kuitenkin GSt-malleille hankalaa ja laskennallisesti raskasta. Niille on siten täytynyt kehittää jokin muu sopivampi estimointimenetelmä.

GSt-mallien tapauksessa estimointiprosessin jakaminen kahteen erilliseen vaiheeseen on osoittautunut toimivaksi ratkaisuksi. Ensimmäisessä vaiheessa käytetään jotakin robustia monihuippusten ja monimutkaisten funktioiden maksimoimiseen sopivaa menetelmää, pyrkimyksenä löytää pisteitä läheltä log-uskottavuusfunktion globaalia maksimia. Tällaiset menetelmät ovat toisaalta tyypillisesti epätarkkoja ja tarkentuvat lähelle maksimipistettä päästyään hitaasti. Siksi estimointi on syytä viimeistellä toisessa vaiheessa, jossa ensimmäisessä vaiheessa löydettyjä estimaatteja käytetään alkuarvoina jollekin gradienttiperusteiselle algoritmille, joka konvergoi nopeasti ja tarkasti lähelle olevaan maksimiin.

Yksi mahdollisuus on käyttää alkuarvojen etsimiseen geneettistä algoritmia, jossa jäljitellään luonnonvalintaa ja lajien evoluutiota parametrivektoreille sovellettuna. Geneettisissä algoritmissa määrätään ensin (usein satunnaisesti) monista parametrivektoreista eli yksilöistä koostuva populaatio. Tämän jälkeen algoritmi toimii kierroksittain siten, että kullakin kierroksella populaatio käy läpi useita eri vaiheita. Eri vaiheissa osa populaation yksilöistä kuolee, lisääntyy, risteytyy tai mutatoituu. Ideana on, että parhaat geenit (eli yksittäiset parametrit) ja niiden sopivimmat yhdistelmät pääsevät levittäytymään populaatioon, muodostaen yhdessä satunnaismutaatioiden kanssa näin kierros kierrokselta parempia yksilöitä. Paremmuusjärjestyksen määrää tässä yksilöiden log-uskottavuuden suuruus. Tutkielman empiirisessä osiossa alustavaan estimointiin käytettävä geneettinen algoritmi perustuu pohjimmiltaan Dorsey'n ja Mayerin (1995) kuvaukseen, mutta siinä on hyödynnetty muun muassa Patnaikin ja Srinivasin (1994) ehdottamia muokkauksia estimoinnin tehostamiseksi.

Toisessa vaiheessa voidaan estimoinnin viimeistelyyn käyttää esimerkiksi tutkielman empiirisessä osiossakin käytettävää ns. quasi-Newton menetelmää (Nash 1990, kappale 15, algoritmi 21), joka muodostaa kuvan maksimoitavan (tai minimoitavan) funktion pinnasta sen gradientin avulla. Edellä kuvattu kaksivaiheinen estimointi ei kuitenkaan aina johda suurimman uskottavuuden estimaattiin, sillä GSt-mallien log-uskottavuusfunktioiden pinnanmuo-

tojen haastavuuden vuoksi geneettinen algoritmi ei välttämättä löydä sille asetetun äärellisen kierrosmäärän puitteissa tarpeeksi lähelle globaalia maksimipistettä (tai mikäli algoritmi on määrätty päättymään konvergenssiin, on se voinut päätyä lokaaliin maksimiin). Tulosten luotettavuutta voidaan parantaa suorittamalla lukuisia estimointikierroksia, mutta käytännössä on hankalaa täysin varmistua aidon globaalin maksimipisteen löytymisestä.

4 Diagnostiikka ja mallinvalinta

4.1 Kvantiiliresiduaalit

Lineaarisista aikasarjamalleista poiketen tavanomaisia Pearsonin residuaaleja ei ole mielekästä hyödyntää GSt-mallien sopivuuden tarkastelemisessa (kun sekoituskomponentteja on vähintään kaksi), koska ne eivät ole yhtälössä (2.6) esiintyvien termien $\varepsilon_{m,t}$ empiirisiä vastineita. Tämä johtuu siitä, ettei kunkin havainnon generoinutta sekoituskomponenttia voida selvittää, sillä yhtälön (2.6) satunnaismuuttujia $s_{1,t}, \dots, s_{M,t}$ ei havaita. Täten Pearsonin residuaalit joudutaan laskemaan regiimien ehdollisten odotusarvojen painotetun keskiarvon avulla, eli vähentämällä kustakin havainnosta y_t ehdollinen odotusarvo $E[y_t | \mathcal{F}_{t-1}]$, ja jakamalla tämä erotus ehdollisella hajonnalla $\sqrt{\text{Var}[y_t | \mathcal{F}_{t-1}]}$. Tuloksena saatavat termit eivät ole sopivia tavanomaisiin teoreettisiin tarkasteluihin, koska ne eivät esimerkiksi ole riippumattomia ajasta. GSt-mallien sopivuutta voidaan kuitenkin tarkastella ns. kvantiiliresiduaalien (Rosenblatt 1952, myöhemmin esim. Dunn ja Smyth 1996) avulla, joita voidaan käyttää kuten tavanomaisia Pearsonin residuaaleja. Kvantiiliresiduaalien käyttöä aikasarjamallien diagnostiikassa ovat tutkineet esimerkiksi Palm ja Vlaar (1997) sekä Kalliovirta (2012).

Kvantiiliresiduaali määritellään yhtälöllä

$$R_{t,\theta} = \Phi^{-1}(F(y_t; \theta | \mathcal{F}_{t-1})), \quad (4.1)$$

missä $\Phi(\cdot)$ on standardinormaalijakauman kertymäfunktio, $F(\cdot | \mathcal{F}_{t-1})$ tarkasteltavan mallin ehdollinen kertymäfunktio ja θ sisältää mallin parametrit. Sen empiirinen vastine on

$$r_{t,\hat{\theta}} = \Phi^{-1}(F(y_t; \hat{\theta} | \mathcal{F}_{t-1})), \quad (4.2)$$

missä $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ on $\boldsymbol{\theta}$:n estimaatti.

Kvantiiliresiduaalien laskemiseksi täytyy siis selvittää tarkasteltavien mallien ehdolliset kertymäfunktiot, jotka saadaan GSt-malleille kaavalla

$$F(y_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \int_{-\infty}^{y_t} f_m(u_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1}) du_t, \quad (4.3)$$

missä funktio $f_m(u_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1})$ on mallin m :nen komponentin ehdollinen tiheysfunktio.

GMAR-mallin ehdollinen kertymäfunktio on siis yhtälön (2.8) perusteella

$$F(y_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \Phi \left(\frac{y_t - \mu_{m,t}}{\sigma_m} \right). \quad (4.4)$$

StMAR-mallin ehdolliselle kertymäfunktioille ei saada suoraan mitään standardimuotoista esitystä, mutta kuten liitteessä A näytetään, voidaan integraaliton lauseke kuitenkin johtaa tietyissä tapauksissa. Tuloksena saadaan esitys

$$F(y_t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \left(\frac{1}{2} + C_1(v_m + p) \sigma_{m,t}^{-1} (y_t - \mu_{m,t}) \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1 + v_m + p}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{(v_m + p - 2) \sigma_{m,t}^2} \right) \right), \quad (4.5)$$

missä $C_1(\cdot)$ on kuten yhtälössä (2.19) ja ${}_2F_1(\cdot)$ on hypergeometrinen funktio (esim. Aomoto ja Kita 2011, kappale 1.2.1), joka on määritelty kun $(\mu_{m,t} - y_t) < \sigma_{m,t} \sqrt{v_m + p - 2}$. Ehdollisen kertymäfunktion hypergeometrisia funktiota hyödyntävä esitys ei siis ole määritelty silloin, kun havainnot poikkeavat suhteessa niiden komponenttikohtaiseen ehdolliseen hajontaan (ja vapausasteisiin sekä p :hen) merkittävästi niiden komponenttikohtaisesta ehdollisesta odotusarvosta. Tapauksissa joissa hypergeometrinen funktio ei ole määritelty, voidaan kvantiiliresiduaalien empiiriset vastineet kuitenkin käytännössä laskea integroimalla ehdollinen tiheysfunktio numeerisesti.

G-StMAR-mallin ehdollinen kertymäfunktio on sekoitus edellä mainituista, eli

$$F(y_t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_{m,t} \Phi \left(\frac{y_t - \mu_{m,t}}{\sigma_m} \right) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_{m,t} \left(\frac{1}{2} + C_1(v_m + p) \sigma_{m,t}^{-1} (y_t - \mu_{m,t}) \times {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1 + v_m + p}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{(v_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2} \right) \right), \quad (4.6)$$

kun hypergeometrinen funktio ${}_2F_1(\cdot)$ on määritelty.

Oikein spesifioidun mallin empiiriset kvantiiliresiduaalit ovat asymptoottisesti riippumattomia ja noudattavat standardinormaalijakaumaa, joten niitä voidaan käyttää graafiseen mallidiagnostiikkaan samoin kuin tavanomaisia Pearsonin residuaaleja. Graafisen tarkastelun lisäksi kvantiiliresiduaaleja voidaan käyttää mallin sopivuutta mittaavien testien rakentamiseen. Kalliovirta (2012) johtaa artikkelissaan sopivat säännöllisyys ehdot (jotka mm. takaavat estimaattorin tavanomaisen asymptoottisen normaalisuuden) täyttävälle malleille asymptoottiset kvantiiliresiduaalit testit autokorrelaation, ehdollisen heteroskedastisuuden sekä normaalisuuden testaamiselle. Kalliovirran testit on rakennettu siten, että huomioivat myös parametrien estimoinnista aiheutuvan epävarmuuden.

4.2 Informaatiokriteerit

Eräs tapa vertailla kilpailevien mallien sopivuutta on käyttää tähän kehitettyjä informaatiokriteeteitä. Ne ovat log-uskottavuudesta ja estimoitavien parametrien lukumäärästä laskettavia tunnuslukuja, joiden tarkoitus on auttaa löytämään tasapaino mallin monimutkaisuuden ja sopivuuden välillä. Informaatiokriteerit ovat erityisen hyödyllisiä valittaessa GSt-malleille sopiva komponenttien määrää, sillä kuten Kalliovirta ym. (2015) artikkelissaan toteavat, siihen ei voida soveltaa tavanomaisia uskottavuuteen perustuvia testejä. Mikäli nollahypoteesi merkitsee regiimin supistumista mallista pois, ei sen voimassaollessa malli toisaalta ole identifioitunut, joten testausongelma on epästandardi. Meitz ja Saikkonen (2017) ovat kuitenkin äskettäin johtaneet asymptoottisen uskottavuusosamäärätestin tapauksille, joissa nollahypoteesin pätiessä kahden regiimin autoregressiivinen malli supistuu lineaari-

seksi malliksi, ja joissa sekoitussuhteet riippuvat havainnoista. He havainnollistavat testiänsä käyttäen esimerkkeinä Lin ja Wongin (2001) LMAR-mallia sekä Kalliovirran ym. (2015) GMAR-mallia.

Merkitään log-uskottavuuden maksimiarvoa lyhyesti symbolilla \hat{l} ja parametrien lukumäärää k :llä. Käyttämämme informaatiokriteerit määritellään seuraavasti:

$$\text{Akaiken informaatiokriteeri } AIC = -2\hat{l} + 2k$$

$$\text{Schwarzin bayesiläinen informaatiokriteeri } BIC = -2\hat{l} + k \log(T)$$

$$\text{Hannahin ja Quinnin informaatiokriteeri } HQIC = -2\hat{l} + 2k \log(\log(T)).$$

Kuten määritelmistä voidaan päätellä, mitä pienempi informaatiokriteerin arvo on, sitä parempana voidaan mallia pitää. Edellä määritellyistä informaatiokriteereistä AIC suosii monimutkaisempia ja BIC yksinkertaisempia malleja, kun HQIC on näiden välimaastossa.

4.3 G-StMAR-mallin rakentaminen

Kuten Kalliovirta ym. (2015) toteavat, on GMAR-mallin rakentaminen luonteva aloittaa estimoimalla aineistoon ensin mahdollisimman sopiva lineaarinen AR-malli, ja tarkestella sen riittävyttä autokorrelaation, ehdollisen heteroskedastisuuden sekä residuaalien jakaumaoletuksen suhteen. Mikäli lineaarinen AR-malli todetaan riittämättömäksi, ehdottavat he komponenttien lisäämistä yksi kerrallaan, kunnes sopiva malli löytyy. Komponenttien lukumäärän suhteen on kuitenkin syytä olla säästäväinen, sillä mikäli komponenttien määrä valitaan liian suureksi, eivät mallin kaikki parametrit identifioitu kunnolla.

GMAR-mallin ollessa kykenemätön selittämään erityisesti tutkittavassa ilmiössä esiintyvää ehdollista heteroskedastisuutta tai poikkeavia havaintoja, on syytä kokeilla StMAR-mallia, jonka rakentamisessa voidaan soveltaa samanlaista menettelyä kuin GMAR-mallille. Koska GMAR- ja StMAR-mallien komponentit ovat rakenteeltaan erilaisia, ei sopivasta GMAR-mallin komponenttien määrästä voida kuitenkaan tehdä suoraan päätelmiä sopivan StMAR-mallin komponenttien määrän suhteen, tai toisinpäin.

G-StMAR-mallin asteiden valintaan edellä kuvattu toimintatapa ei sellaisenaan sovi, sillä valittavana on sekä normaali- että t-jakaumaan perustuvien komponenttien lukumäärä. StMAR-mallissa tarve GMAR-tyyppisille komponenteille ilmenee käytännössä kappaleen (2.5) alussa kuvatuista syistä vapausasteiden estimoitumisena suuriksi, jolloin vastaavat komponentit alkavat muistuttamaan GMAR-mallin komponentteja. G-StMAR-mallin rakentaminen on siten luontevaa aloittaa etsimällä edellä kuvattua menettelyä käyttäen mahdollisimman sopiva StMAR-mallin aste M . Mikäli sopivimman StMAR-mallin jonkin regiimin vapausasteet estimoituvat merkittävän suuriksi, on syytä estimoida G-StMAR-malli, jossa StMAR-tyyppisiä komponentteja on $M - 1$ kappaletta ja GMAR-tyyppisiä yksi. StMAR-tyyppisiä komponentteja vaihdetaan näin normaalsiin yksi kerrallaan, kunnes sopiva malli löytyy. G-StMAR-malliin voidaan myös suoraan estimoida useampi GMAR-komponentti niitä yksi kerrallaan lisäävän menettelyn sijaan, jos useamman StMAR-mallin komponentin vapausasteet ovat huomattavan suuria. Tätä voidaan suositella tapauksissa, joissa vapausasteet ovat niin suuria, että kyseiset StMAR-komponentit eivät käytännössä juurikaan eroa GMAR-komponenteista. Tällöin numeerinen estimointialgoritmi ei kykene erottamaan kaikkia GMAR- ja StMAR-komponentteja toisistaan, eikä malli identifioitu kunnolla edes ehdon (2.37) pätiessä.

Kun sopivat GMAR- ja StMAR-komponenttien asteet ovat löytyneet, voidaan tarkastella olisiko mallin autoregressiivisille parametreille tarpeen asettaa lineaarisia rajoitteita. Kaikki regimit eivät välttämättä noudata juuri $p:n$ asteen autoregressiivistä prosessia, joten erityisesti joidenkin AR-parametrien rajoittaminen nolnaan voi tulla kyseeseen. Toisena erikoistapauksena mainittakoon tilanne, jossa eri regimit ovat autoregressiiviseltä rakenteeltaan samanlaiset, mutta niillä on eriävät odotusarvot tai varianssit.

5 Ennustaminen

Kun prosessin tulevia arvoja halutaan ennustaa sen havaitun historian avulla, on siihen ehdollinen odotusarvo keskineliövirheen mielessä optimaalinen valinta (Hamilton 1994, s.72-73). GSt-malleille ensimmäisen askeleen optimaalinen ennuste on esitetty yhtälöissä (2.11), (2.23) ja (2.33), mutta mallien monimutkaisen rakenteen vuoksi useamman askeleen ennusteiden laskeminen on analyttisesti huomattavan hankalaa. Käytännössä ennuste on näin ollen

järkevää laskea numeerisesti, esimerkiksi simulaatioiden avulla.

GSt-prosessien mahdollisia tulevia arvoja voidaan niiden havaittuun menneisyyteen perustuen simuloida suoraviivaisesti määrittely-yhtälön (2.6) avulla. Ensin arvotaan seuraavan havainnon generoiva sekoituskomponentti M -ulotteisesta multinomijakaumasta, jonka toistojen lukumäärä on yksi ja parametreina ovat $\alpha_{1,t+1}, \dots, \alpha_{M,t+1}$. Kun havainnon generoiva komponentti \tilde{m} on valittu, eli yhtälössä (2.6) $s_{t+1,\tilde{m}} = 1$, arvotaan virhetermi $\sigma_{\tilde{m},t+1}\varepsilon_{\tilde{m},t+1}$ komponentin määräämästä jakaumasta, ja lasketaan regiimikohtainen ehdollinen odotusarvo $\mu_{\tilde{m},t+1}$. Sijoitetaan saadut luvut satunnaismuuttujan y_{t+1} :n kaavaan (2.6) (jossa $s_{t+1,m} = 0$ kun $m \neq \tilde{m}$), ja toistetaan toimenpide ajanhetkille $t+2, t+3, \dots$ kunnes halutun mittainen realisaatio on saatu.

Vahva suurten lukujen laki sanoo, että minkä tahansa riippumattomien ja samoin jakautuneiden (reaaliarvoisten) satunnaismuuttujien jonon X_1, X_2, \dots keskiarvo konvergoi odotusarvoon $E[X_1]$ melkein varmasti, kunhan se on äärellisenä olemassa. Suorittamalla riippumattomia simulaatioita prosessin historiaan \mathcal{F}_t perustuen, ja merkitsemällä $y_{i,t+j}$:llä i :nen simulaation arvoa $t+j$ ($j \geq 1$), voidaan jonoksi valita $y_{1,t+j}, y_{2,t+j}, \dots$, jolloin todennäköisyydellä yksi

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_{i,t+j} \rightarrow E[y_{t+j} | \mathcal{F}_t], \text{ kun } n \rightarrow +\infty. \quad (5.1)$$

Prosessille saadaan siis h :n askeleen ennuste simuloimalla suuri määrä h :n mittaisia realisaatioita sen mahdollisista tulevista arvoista, ja laskemalla niiden keskiarvo kullekin $t+1, \dots, t+h$. Väliennusteet voidaan laskea siten, että $\alpha \cdot 100\%$ luottamustason väliennusteeksi valitaan jotkin sellaiset empiiriset kvantiilipisteet, joiden väliin jäävä alue sisältää simuloituista realisaatioista osuuden α .

6 Empiirinen esimerkki

Tarkastellaan Standard & Poor's 500 (S&P 500) osakemarkkinaindeksin volatiliteettia kuvaavaa, ajanjakson 3.1.2000-20.5.2016 kattavaa aikasarjaa, jota myös Meitz ym. (2018) käyttävät esimerkkinä StMAR-mallin empiirisissä tarkasteluissa. Tarkastelemamme aikasarja on saatu Oxford-Man tut-

kimuslaitoksen (Heber ym. 2009) data-kirjastosta, ja siinä päivittäistä volatiliteettia estimoidaan Barndorff-Nielsenin ym. (2008) esittämällä *Realized Kernel* (RK) estimaattorilla. Jotta havaintojen jakauma olisi symmetrisempi ja määritelty koko reaaliakselilla, estimoinne mallit käyttäen logaritmoitua sarjaa, joka on yhdessä alkuperäisen kanssa esitetty Kuvassa 1. Käytämme ajanjakson 3.1.2000-3.6.2014 kattavat ensimmäiset 3597 havaintoa estimointiin, ja säästämme jäljelle jäävät 496 havaintoa ennustamiseen, kuten myös Meitz ym. (2018) ovat tehneet.

Meitz ym. (2018) estimoivat logaritmoidulle RK-sarjalle StMAR-mallin asteilla⁵ $p = 4$ ja $M = 1, 2, 3$, ja vertaavat niiden $N = 1, 5, 10, 22$ askeleen⁶ ennusteiden tarkkuutta toisiinsa sekä Heterogeeniseen AR-malliin (Corsi 2009) ja normaaliseen AR(11)-malliin. Ennustetarkkuuden mittareina he käyttävät ns. quasi-uskottavuusvirhettä (QLIKE) sekä keskineliövirhettä (MSE), jotka määritellään kappaleessa 6.2. He toteavat StMAR-mallien antavan verrokkejaan tarkemmat ennusteet QLIKE:n mielessä, mutta MSE:n perusteella myös verrokkimallit pärjäsivät hyvin.

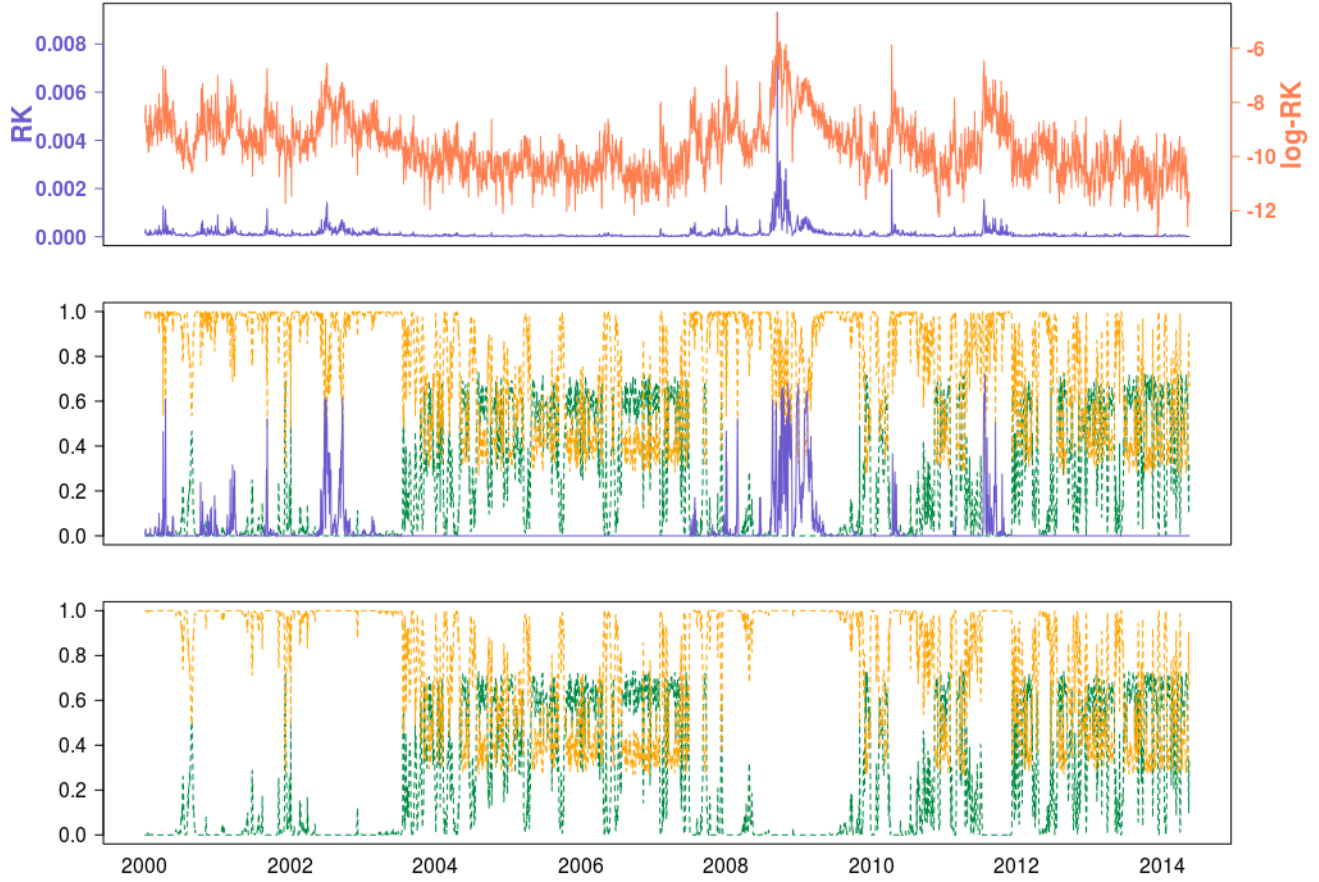
On kiinnostavaa tutkia kuinka G-StMAR-malli estimoituu, kun sen pohjana on sellainen StMAR-malli, jonka komponenteista osalla vapausasteparametrin estimaatti on suuri. Toisaalta kiinnostavaa on myös, millainen on G-StMAR-mallin ennustetarkkuus pohjana olevaan StMAR-malliin verrattuna. Nojaudumme Meitzin ym. (2018) esittämiin tuloksiin ennustetarkkuuden vertailussa muiden mallien suhteen, ja vertaamme G-StMAR-mallia vain StMAR(4,2)- ja StMAR(4,3)-malleihin. Mallien estimoinnissa, ennustamisessa ja muissa empiirisissä tarkasteluissa käytämme R-ohjelmistoa ja CRAN-jakeluverkossa saatavilla olevaa 'uGMAR'-pakettia, jonka laajentaminen G-StMAR-mallille toteutettiin osana tutkielmaa.

6.1 Estimointi

Taulukossa 1 on esitetty sataan estimointikierrokseen ja ehdolliseen log-uskottavuusfunktioon perustuvat estimaatit StMAR-mallille asteilla $(p, M) = (4, 2)$, $(4, 3)$, ja G-StMAR-mallille asteilla $(p, M_1, M_2) = (4, 1, 1)$, $(4, 1, 2)$, $(4, 2, 1)$.

⁵He estimoivat StMAR-mallin myös asteilla $p = 1, 2, 3$ ja $M = 1, 2, 3$, mutta päätyivät tarkastelemaan erityisesti astetta $p = 4$ olevia malleja.

⁶ $N = 1$ kuvaa yhden päivän volatiliteettiennustetta, $N = 5$ viikottaista, $N = 10$ kahden viikon ennustetta ja $N = 22$ kuukausittaista ennustetta.



Kuva 1: S&P 500 indeksin päivittäistä volatilitettä kuvaava aikasarja (violetti) ja sen logaritmi (oranssi) ajanjaksolta 3.1.2000-3.6.2014 (ylh.). Estimoidun G-StMAR(4,2,1)- ja G-StMAR(4,1,1)-mallin sekoitussuhteet (kesk. ja alh.).

	StMAR(4, 2)	G-StMAR(4, 1, 1)	StMAR(4, 3)	G-StMAR(4, 1, 2)	G-StMAR(4, 2, 1)
$\varphi_{1,0}$	−0.851 (0.112)	−5.899 (1.212)	−0.859 (0.116)	−5.459 (1.279)	−6.200 (1.232)
$\varphi_{1,1}$	0.432 (0.024)	0.292 (0.052)	0.407 (0.024)	0.479 (0.116)	0.305 (0.054)
$\varphi_{1,2}$	0.221 (0.025)	0.109 (0.054)	0.216 (0.025)	0.334 (0.127)	0.103 (0.056)
$\varphi_{1,3}$	0.122 (0.025)	0.013 (0.050)	0.123 (0.025)	0.206 (0.112)	0.006 (0.053)
$\varphi_{1,4}$	0.134 (0.024)	0.026 (0.060)	0.162 (0.024)	−0.728 (0.132)	−0.001 (0.063)
σ_1^2	0.285 (0.015)	0.285 (0.024)	0.283 (0.015)	0.088 (0.034)	0.290 (0.026)
ν_1	10.510 (1.647)		10.712 (1.744)		
$\varphi_{2,0}$	−5.381 (1.092)	−0.820 (0.108)	−5.744 (1.121)	−0.859 (0.118)	−5.443 (1.259)
$\varphi_{2,1}$	0.289 (0.047)	0.428 (0.023)	0.300 (0.050)	0.407 (0.025)	0.480 (0.115)
$\varphi_{2,2}$	0.129 (0.049)	0.225 (0.024)	0.121 (0.052)	0.216 (0.025)	0.333 (0.126)
$\varphi_{2,3}$	0.023 (0.047)	0.122 (0.024)	0.015 (0.049)	0.123 (0.025)	0.206 (0.111)
$\varphi_{2,4}$	0.047 (0.054)	0.138 (0.023)	0.019 (0.057)	0.162 (0.024)	−0.727 (0.131)
σ_2^2	0.287 (0.022)	0.286 (0.015)	0.290 (0.023)	0.283 (0.015)	0.089 (0.034)
ν_2	29.029 (2.688)	10.224 (1.647)	31.692 (4.994)	10.695 (1.846)	
$\varphi_{3,0}$			−5.453 (1.109)	−5.744 (1.142)	−0.833 (0.113)
$\varphi_{3,1}$			0.479 (0.099)	0.300 (0.050)	0.405 (0.024)
$\varphi_{3,2}$			0.334 (0.122)	0.121 (0.053)	0.220 (0.024)
$\varphi_{3,3}$			0.206 (0.112)	0.015 (0.050)	0.124 (0.024)
$\varphi_{3,4}$			−0.727 (0.119)	0.019 (0.058)	0.164 (0.023)
σ_3^2			0.088 (0.031)	0.290 (0.023)	0.284 (0.015)
ν_3			5550.729 (0.112)	32.134 (13.132)	10.410 (1.681)
α_1	0.724 (0.066)	0.237 (0.059)	0.721 (0.062)	0.023 (0.011)	0.222 (0.058)
α_2			0.256 (0.064)	0.721 (0.063)	0.023 (0.010)
$L_T^{(c)}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$	−2832.665	−2833.286	−2814.469	−2814.469	−2814.851
AIC	5695.330	5694.573	5674.938	5672.937	5671.702
HQIC	5728.406	5725.443	5725.654	5721.448	5718.008
BIC	5788.131	5781.187	5817.233	5809.046	5801.624

Taulukko 1: Sataan estimointikierrokseen ja ehdolliseen log-uskottavuusfunktioon perustuvat estimaatit, niiden approksimatiiviset keskivirheet (suluissa), log-uskottavuudet ja informaatiokriteerien arvot. Kunkin informaatiokriteerin pienin arvo on lihavoitu.

StMAR(4, 2)-mallin ensimmäisen komponentin vapausasteparametrin estimaatti on noin 10.5 ja toisen noin 29. Koska jälkimmäinen estimaatti on melko suuri, estimoittiin tämän pohjalta G-StMAR(4, 1, 1)-malli. Saadut estimaatit ovat samansuuntaisia kuin pohjana olevalla StMAR-mallilla, mutta GMAR-tyyppisen komponentin AR-parametrien estimaatit ovat hieman pienempiä, ja vakioparametrin φ_0 estimaatti on itseisarvoltaan hieman suurempi kuin StMAR(4, 2)-mallilla.

StMAR(4, 3)-mallin kahden ensimmäisen komponentin estimaatit muistuttavat estimoitua StMAR(4, 2)-mallia. Sen kolmannen komponentin vapausasteparametrin estimaatti on hyvin suuri, sekoitussuhde- ja varianssiparametrien estimaatit ovat hyvin pieniä, ja sen estimoitu ehdollinen odotusarvo on hyvin vahva.⁷ Kuvassa 1 (jossa asiaa on havainnollistettu vastaavilla G-StMAR(4, 1, 1)- ja G-StMAR(4, 2, 1)-malleilla) esitetyistä empiirisistä sekoitussuhteista voidaan päätellä, että kolmas (violetilla osoitettu) regiimi ottaa huomioon vain niitä tilanteita, joissa volatilitietin vaihtelu on ollut merkittävän suurta. Tämä selittää StMAR(4, 3)- ja G-StMAR(4, 2, 1)-mallien kolmannen komponentin pienen sekoitussuhdeparametrin estimaatin. Tulos on kiinnostava, koska varianssiparametrin estimaatti on suhteellisen pieni, jolloin erittäin vahvaksi estimoitunut ehdollinen odotusarvo määrittää kyseisen regiimin osalta varsin suuren osan volatilitietin vaihtelusta. Kolmannen regiimin empiiristen sekoitussuhteiden jäädessä suurimmillaankin reilusti ykköstä pienemmäksi, sisältyy näihin osakemarkkinoiden huomattavan heilahtelun ajanjaksoihin kuitenkin myös tämän mallin mukaan paljon satunnaisuutta.

Lähemmin tarkasteltuna StMAR(4, 3)-mallin parametrivektorin estimaatti ei kuitenkaan vaikuta täysin ongelmattomalta. Sen kolmannen komponentin kohdalla stationaarisuusehto (2.2) on lähellä rikkoontua, sillä ehdossa esiintyvän polynomin juurien itseisarvot ovat tapauksessamme noin 1.039 ja 1.128 (molemmat kahdesti, juuret ovat kompleksisia). Estimaatti on siis lähellä luonnollisen parametriavaruuden⁸ reunaa, ja todellisen parametriarvon ollessa reunapiste ei SU-estimaattorin tavanomainen asymptotiikka toimi. Liitteen B Kuvassa 3 on esitetty StMAR(4, 3)-mallin kolmannen komponentin parametrien profiiluskottavuusfunktiot, joiden perusteella estimaat-

⁷Vahvalla ehdollisella odotusarvolla tarkoitamme, että komponentin AR-parametrien (estimaattien) itseisarvojen summa on suuri.

⁸Joka on $\{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{M(2+p)} \times (0, 1)^{M-1} \times (2, \infty)^M, \sigma_m^2 > 0, m = 1, \dots, M, \text{ ehdot (2.2) ja (2.28) täyttyvät}\}$.

tit vaikuttavat kuitenkin olevan selkeästi parametriavaruuden sisällä.⁹ Vapausasteparametrin profiiliuskottavuusfunktio on odotetusti sen suurilla arvoilla hyvin tasainen. Estimoitujen G-StMAR(4, 1, 2)- ja G-StMAR(4, 2, 1)-mallien vastaavien komponenttien parametrien profiiliuskottavuusfunktiot eivät silmämääräisesti eroa kuvassa 3 esitetyistä (vapausasteparametrin puutumista lukuunottamatta), eikä kuvia näistä siten esitetä.

Profiiliuskottavuusfunktioiden lisäksi estimaatin lähiympäristöä voidaan tutkia (numeeristen) derivaattatarkasteluiden avulla. Lokaalissa maksimipisteessä log-uskottavuusfunktion gradientin (numeerisen approksimaation) tulee olla nolla (tai lähellä sitä) ja Hessen matriisin negatiivisesti definiitti, eli sen kaikkien ominaisarvojen tulee olla negatiivisia. Vektorianalyysistä tiedetään, että mikäli gradientin nollakohdassa osa Hessen matriisin ominaisarvoista on positiivisia ja osa negatiivisia, on kyseessä lokaalin maksimin sijasta satulapiste. Taulukossa 2 on esitetty kunkin estimoidun mallin gradientin itseisarvoltaan suurin elementti (FOC eli *First Order Condition*) sekä Hessen matriisin suurin ominaisarvo (SOC eli *Second Order Condition*) oletetun SU-estimaatin määräämässä pisteessä. Nähdään, että StMAR(4, 3)-mallin gradientti poikkeaa huomattavasti nolasta, ja sen Hessen matriisilla on positiivinen ominaisarvo, mikä viittaa siihen ettei kyseessä ole maksimipiste, ja että malli on estimoitunut huonosti. StMAR(4, 3)-mallin kanssa lähes identtiseksi estimoituneen G-StMAR(4, 1, 2)-mallin osalta vastaavaa ongelmaa FOC:n ja SOC:n¹⁰ kanssa ei kuitenkaan havaita, vaan hyvin suuren vapausasteparametrin sisältävän komponentin muuttaminen GMAR-tyyppiseksi vaikuttaa parantaneen estimoitumista merkittävästi. Myös StMAR(4, 2)-, G-StMAR(4, 1, 1)- ja G-StMAR(4, 2, 1)-mallien FOC ja SOC arvot vaikuttavat kohtuullisilta, joten on perusteltua epäillä kolmannen komponentin merkittävän suurella vapausasteparametrin estimaatilla olevan vaikutusta StMAR(4, 3)-mallin estimointia koskeviin ongelmiin.

⁹Myös muiden StMAR(4,3)-mallin parametrien estimaattit ovat selvästi luonollisen parametriavaruuden sisäpisteitä, lukuunottamatta kolmannen regiimin hyvin pienen sekoi-tussuhdeparametrin estimaattia $1 - \hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2$, jonka seurauksena myös estimaatit $\hat{\alpha}_1$ ja $\hat{\alpha}_2$ ovat huomattavan lähellä parametriavaruuden reunaa. Lisäksi StMAR(4,3)-mallin kolmannen komponentin varianssiparametrin estimaatti on todetun mukaisesti lähellä nollaa, mutta profiiliuskottavuusfunktion maksimipiste ei sijaitse rajalla

¹⁰Huomioitakoon kuitenkin, että G-StMAR(4, 1, 2)-mallin Hessen matriisin suurin ominaisarvo on varsin lähellä nollaa. Näin ei kuitenkaan ole vastaavan G-StMAR(4, 2, 1)-mallin tapauksessa.

	StMAR(4, 2)	G-StMAR(4, 1, 1)	StMAR(4, 3)	G-StMAR(4, 1, 2)	G-StMAR(4, 2, 1)
FOC	0.019	0.027	1.980	0.005	0.057
SOC	−0.138	−0.362	4.503	−0.006	−0.345

Taulukko 2: Ehdollisen log-uskottavuusfunktion approksimoidun gradientin itseisarvon suurin elementti (FOC) ja Hessen matriisin suurin ominaisarvo (SOC) oletetun SU-estimaatin määräämässä pisteessä, kun niiden numeeriset approksimaatiot perustuvat keskeisdifferenssiin differenssillä $6 \cdot 10^{-6}$.

G-StMAR(4, 2, 1)-malli estimoitui G-StMAR(4, 1, 2)-malliin verrattuna samankaltaisesti kuin G-StMAR(4, 1, 1)-malli StMAR(4, 2)-malliin verrattuna. GMAR-tyyppiseksi vaihdetun komponentin estimoitu vapausasteparametri onkin samaa suuruusluokkaa molemmissa tapauksissa. Muiden komponenttien estimaatit säilyivät likimain muuttumattomina, mutta StMAR-tyyppiseen vastineeseensa verrattuna GMAR-tyyppiseksi vaihdetun komponentin AR-parametreista estimoitui hieman pienempiä ja vakioparametrissa φ_0 hieman suurempi. Varianssiparametrin estimaatti ei muuttunut.

AIC:n ja HQIC:n perusteella tutkituista malleista G-StMAR(4, 2, 1)-malli sopii parhaiten kuvaamaan S&P 500 indeksiin päivittäisen volatilitietin vaihtelua, ja BIC:n mukaan parhaiten sopii G-StMAR(4, 1, 1)-malli. Graafista sopivuuden tutkimista varten liitteen B Kuvassa 4 on esitetty StMAR(4, 1, 1)-mallin kvantiiliresiduaalien aikasarja, kvantiilikuva, ja kvantiiliresiduaalien ja niiden neliöiden otosautokorrelaatiofunktiot. Muiden Taulukossa 1 esitettyjen mallien graafiset diagnostiikkakuvat eivät silmämääräisesti eroa juurikaan edellä mainitusta, eikä niitä siten esitetä. Kvantiiliresiduaalien perusteella mallit sopivat aineistoon kohtuullisesti.

6.2 Ennustetarkkuuden vertailu

Estimoitumisen lisäksi G-StMAR-mallia on kiinnostaavaa verrata StMAR-malliin ennustetarkkuuden mielessä. Ennustaminen suoritetaan kappaleessa 5 kuvatulla simulaatiomenettelyllä, mutta ennusteena käytetään Meitz ym. (2018) esimerkkiä seuraten otoskeskiarvon sijasta otosmediaania. Ennustami-

nen aloitetaan simuloimalla prosessista estimointiin käytettyyn aikasarjaan perustuen 10000 realisaatiota, joiden kunkin pituus on 22. Tämän jälkeen aikasarjaa kasvatetaan yhdellä jäljelle jääneestä 496 havainnosta, ja näin syntyneeseen aikasarjaan perustuen simuloidaan prosessista jälleen 22 askeleen mittaisia realisaatioita. Toimenpide toistetaan kunnes (viimeistä lukuunottamatta) kaikki ennustamiseen säästetyt 496 havaintoa on käyty läpi. Malleja ei estimoida ennustejankohdan edetessä uudestaan, vaan kaikilla ennustekieroksilla käytetään Taulukossa 1 esitettyjä estimaatteja. Kullekin mallille lasketaan $N = 1, 5, 10, 22$ askeleen ennusteet simuloituja realisaatioita käyttäen, ja kutakin ennustetta verrataan niitä vastaaviin toteutuneisiin havaintoihin. Koska haluamme ennustaa volatilitteettia emmekä niinkään sen logaritmia, tehdään ennusteille ennen ennustetarkkuuden mittaamista eksponenttimuunnos.

Tarkastelemamme aikasarja on (RK-)estimaatti todellisuudessa ei-havaittavasta S&P 500 indeksin päivittäisestä volatilitteetista, joten itse volatilitteetin (eikä sen estimaatin) ennustetarkkuutta mitatessa tulee huomioida volatilitteetin estimoinnista aiheutuvien virheiden vaikutus siihen, kuinka eri mallien tuottamat ennusteet vertautuvat toisiinsa nähden. Siksi mittaamme ennustevirhettä kahdella eri funktiolla, joiden Patton (2011) on näyttänyt olevan robusteja¹¹ estimoinnista aiheutuvien virheiden suhteen. Olkoon \widehat{RM} ennuste, ja RM (*Realized Measure*) sitä vastaava toteutunut havainto. Ensimmäinen käyttämämme ennustetarkkuuden mittareista on ns. quasi-uskottavuusvirhe (QLIKE), joka määritellään kaavalla¹²

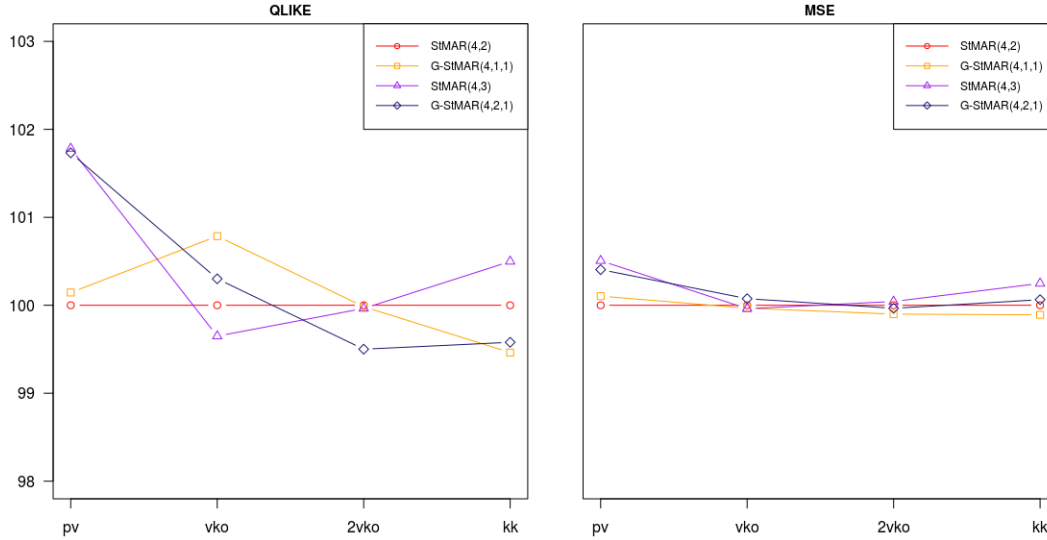
$$\text{QLIKE} = \frac{RM}{\widehat{RM}} - \log \frac{RM}{\widehat{RM}} - 1.$$

Toinen käyttämämme mittari on keskineliövirhe (MSE), joka määritellään

$$\text{MSE} = \left(RM - \widehat{RM} \right)^2.$$

¹¹Robustilla tarkoitetaan tässä sitä, että käytetyn virheen odotusarvot asemoituvat eri ennusteiden välillä samoin riippumatta siitä, verrataanko ennusteita todelliseen volatilitteettiin, vai johonkin sen ehdollisesti (ehdolla tunnettu historia) harhattomaan estimaattiin.

¹²Meitzin ym. (2018) tapaan käytämme Pattonin (2011) artikkelissa esiintyvistä quasi-uskottavuusvirheen määritelmästä eriyvää, mutta vaihtoehtoiset mallit samoin asemoivaa määritelmää, jota myös esimerkiksi Bollerslev ym. (2016) hyödyntävät tutkiessaan mallinsa kykyä ennustaa volatilitteettia.



Kuva 2: Taulukon 1 mallien suhteellinen ennustetarkkuus quasi-uskottavuusvirheellä (vas.) ja keskineliövirheellä (oik.) mitattuna, kun ennusteiden askelpituuksina on $N = 1, 5, 10, 22$ (pv, vko, 2vko, kk).

Molempien, QLIKE:n ja MSE:n käyttäminen ennustevirheiden mittaamisessa on ollut viimeaikaisessa kirjallisuudessa suosittua (esim. Han ym. 2015, Bollerslev ym. 2016, Lócsa ja Molnár 2017, Boasson ym. 2018 ja Meitz ym. 2018). Esimerkiksi Han ym. (2015) ja Meitz ym. (2018) ovat Pattonin ja Sheppardin (2009) simulaatiokokeisiin perustuen päätyneet käyttämään näistä QLIKE:ä ensisijaisena mittarina.

Kuvassa 2 on esitetty Taulukon 1 mallien (G-StMAR(4, 1, 2)-malli on jätetty pois, koska se on ennusteiden kannalta käytännössä identtinen StMAR(4, 3)-mallin kanssa) suhteelliset ennustetarkkuudet $N = 1, 5, 10, 22$ askeleen ennusteille siten, että vertailumallina on käytetty StMAR(4, 2)-mallia, jonka tarkkuudeksi on asetettu vakio 100. Esimerkiksi suhteellinen ennustetarkkuus 101 tarkoittaa sitä, että kyseisen mallin ennusteet ovat sadasosan StMAR(4, 2)-mallia epätarkempia. Nähdään, että molemmilla ennustetarkkuuden mittareilla ja kaikilla tutkituilla ennusteaskelilla erot vastaavien StMAR- ja G-StMAR-mallien välillä jäävät alle prosenttiin, eikä eroissa vaikuta olevan systematiikkaa. Tulos on odotettu, sillä AR-parametrien estimaatit muutuivat vain vähän siirryttäessä StMAR-mallista G-StMAR-malliin, GMAR-

tyyppiseksi vaihdetun komponentin vapausasteparametrin estimaatin ollessa sekä kahden että kolmen regiimin tapauksessa noin 30.

Piste-ennusteiden lisäksi on kiinnostavaa tutkia myös väliennusteita. Väliennusteet on tapauksessamme laadittu etsimällä sellaiset mahdollisimman pienet kvantiilipisteet, että halutun osuuden ennustettavista havainnoista voi estimoitujen mallien perusteella odottaa olevan niitä pienempiä. Taulukossa 3 esitetyistä 99%-, 95%- ja 90%-väliennusteiden sisältämistä suhteellisista havaintomääristä nähdään, ettei väliennusteiden oikeellisuudessa ole juuri eroa tutkittujen mallien välillä. Kuukauden (22 askeleen) päähän lasketut 95%- ja 90%-väliennusteet ovat kaikilla malleilla liian leveät,¹³ mutta muiden askelpituuksien osalta ne ovat melko totuudenmukaiset. Tilannetta on havainnollistettu G-StMAR(4,1,1)-mallilla Liitteen B kuvassa 5, jossa on piirrettynä sen 10 askeleen ja 22 askeleen 95%-väliennusteet yhdessä ennustamiseen käytetyn aikasarjan kanssa.

Edellä mainittuja yllättävämpi tulos on ennustetarkkuuden erojen pienuus kahden regiimin ja kolmen regiimin mallien välillä, ja se etteivät kolmen regiimin mallit antaneet systemaattisesti kahden regiimin malleja tarkempia ennusteita. Kolmen regiimin mallien ollessa samankaltaisia kahden regiimin mallien kanssa, mutta huomiodessaan suuren volatilitietin vaihtelun ajanjaksot lisäkomponentilla, voi niiden odottaa antavan tarkempia ennusteita näinä ajanjaksoina. Näin ei kuitenkaan ennustamiseen käytetyssä aikasarjassa käy. Tämä voidaan todeta esimerkiksi tarkastelemalla Liitteen B Kuvaa 6, jossa on piirrettynä logaritmoidut G-StMAR(4, 2, 1)-mallin QLIKE:en perustuvat suhteelliset yhden askeleen ennustevirheet suhteessa G-StMAR(4, 1, 1)-malliin, yhdessä ennustamiseen käytetyn aikasarjan ja G-StMAR(4, 2, 1)-mallin lisäkomponentin sekoitussuhteiden kanssa. Lisäkomponentin sekoitussuhteet jäävät ennustamiseen käytetyssä aikasarjassa pieniksi myös korkean volatilitietin vaihtelun ajanjaksoina, mikä selittää sen, ettei sillä ollut ennusteisiin merkittävää vaikutusta.

¹³Tulos eroaa StMAR(4, 2)-mallin osalta Meitzin ym. (2018) tuloksesta huomionarvoisesti, sillä heidän tulostensa mukaan kuukauden päähän lasketut väliennusteet sisältävät havaintoja useiden prosenttiyksiköiden verran taulukossa 3 esitettyä vähemmän. Meitz ym. (2018) perustavat ennusteensa Matlab-ohjelmistolla simuloituihin 500,000 realisation otoksiin, sekä samaan dataan ja (suurella tarkkuudella) samaan StMAR(4, 2)-mallin estimaattiin jota käytetään myös tässä tutkielmassa.

	99%	pv 95%	90%	99%	vko 95%	90%
StMAR(4, 2)	99.19	95.97	92.14	98.17	94.92	90.85
G-StMAR(4, 1, 1)	99.19	96.17	92.54	98.17	94.92	91.06
StMAR(4, 3)	99.19	95.97	92.54	98.17	94.92	91.06
G-StMAR(4, 2, 1)	98.99	96.17	92.54	98.17	94.92	91.06

	99%	2vko 95%	90%	99%	kk 95%	90%
StMAR(4, 2)	98.77	94.87	91.38	99.16	98.11	94.53
G-StMAR(4, 1, 1)	98.77	95.07	91.17	99.16	98.11	94.53
StMAR(4, 3)	98.77	94.87	91.17	99.16	97.47	94.32
G-StMAR(4, 2, 1)	98.77	95.07	91.17	99.16	97.68	94.32

Taulukko 3: Taulukon 1 mallien yläkvantiilipisteisiin perustuvien 99%-, 95%- ja 90%-väliennusteiden sisältämien havaintomäärien prosenttiosuus, kun väliennusteet on laadittu $N = 1, 5, 10, 22$ (pv, vko, 2vko, kk) askeleen päähän.

7 Päätelmät

Tutkielmassa esiteltiin Glasbeyn (2001) ja Kalliovirran ym. (2015) GMAR-malli sekä Meitzin ym. (2018) StMAR-malli, joihin perustuen esitettiin G-StMAR-malli, jossa osan sekoituskomponenteista oletetaan olevan GMAR-tyyppisiä ja osan StMAR-tyyppisiä. G-StMAR-malli todettiin StMAR-mallin luontevaksi yleistykseksi tilanteissa, joissa osa StMAR-mallin komponenteista estimoituu luonteeltaan GMAR-tyyppisiksi. Lisäksi näytettiin, kuinka GMAR- ja StMAR-mallien stationaarista jakaumaa, ergodisuutta ja SU-estimaattorin vahvaa tarkentuvuutta koskevat teoreettiset tulokset yleistyivät G-StMAR-mallille ilmeisellä tavalla.

Tutkielman empiirisessä osiossa tutkittiin, kuinka G-StMAR-malli estimoituu StMAR-malliin verrattuna tapauksissa, joissa GMAR-tyyppiseksi vaihdetun komponentin vapausasteparametrin estimaatti on noin 30, sekä tapauksessa, jossa se on tuhansia. Jälkimmäisessä tapauksessa StMAR-malli estimoitui huonosti, eikä saatua estimaattia voitu numeeristen derivaattatarkasteluiden perusteella pitää maksimipisteenä. Havaitut ongelmat vaikuttivat kuitenkin kadonneen tai ainakin merkittävästi pienentyneen, kun estimoitiin G-StMAR-malli, jossa suuren vapausasteparametrin estimaatin sisältävä komponentti vaihdettiin GMAR-tyyppiseksi. Muiden parametrien estimaatteihin vaihdos ei juurikaan vaikuttanut. Tapauksissa, joissa GMAR-tyyppiseksi vaihdetun komponentin vapausasteparametrien estimaatit olivat noin 30, muutos oli pieni, ja StMAR- ja G-StMAR-mallit estimoituivat toisiinsa nähden likimain yhtä hyvin. Komponenttivaihdoksen vaikutus suhteelliseen ennustetarkkuuteen jäi tutkituilla malleilla alle prosenttiin kaikilla käytetyillä mittareilla ja ennusteiden askel-pituuksilla.

StMAR-malliin verrattuna G-StMAR-mallin teoreettiset hyödyt ovat suurilta osin kosmeettisia, sillä vaikka G-StMAR-malli on säästeliäämpi ja sopii joissain tapauksissa StMAR-mallia luontevammin kuvaamaan mallinnettavaa ilmiötä, ovat niiden teoreettiset piirteet samankaltaiset. G-StMAR-mallista voi kuitenkin olla hyötyä esimerkiksi joissakin sen yksittäisiä komponentteja koskevissa teoreettisissa tarkasteluissa, sillä normaalijakauman ominaisuudet eroavat mm. momenttien olemassaolon osalta t-jakaumasta. Saatu- jen tulosten perusteella G-StMAR-mallista on käytännössä erityisesti hyötyä silloin, kun StMAR-mallin jonkin komponentin hyvin suuri vapausasteparametri aiheuttaa ongelmia mallin estimoitumiselle.

Jatkotutkimuksena voidaan teoriapuolelta pyrkiä osoittamaan SU-estimaattorin vahva tarkentuvuus myös yleisellä alkuarvoilla, ja yrittää näyttää toteen joitakin sen asympotoottiseen normaalisuuteen vaadittavia oletuksia. Empiiriseltä puolelta olisi kiinnostavaa tutkia laajemmin, kuinka G-StMAR-malli reagoi StMAR-mallin estimointiin liittyviin ongelmiin, jotka ilmenevät silloin, kun jonkin komponentin vapausasteparametri estimoituu hyvin suureksi. Lisäksi voitaisiin tutkita StMAR-mallista G-StMAR-malliin siirtymisen vaikutusta ennustetarkkuuteen tapauksissa, joissa GMAR-tyyppiseksi vaihdetun komponentin vapausasteparametrin estimaatti on tarkastelemiamme pienempi, esimerkiksi väliltä 20-25.

Viitteet

- [1] Aomoto K., Kita M. 2011. *Theory of Hypergeometric Functions*. Springer.
- [2] Barndorff-Nielsen O.E., Hansen P.R., Lunde A., Shephard N. 2008. Designing Realized Kernels to Measure the ex post Variation of Equity Prices in the Presence of Noise. *Econometrica* **76**, 6: 1481-1536.
- [3] Boasson V., Makushina V., Shishlenin S., Xiao L. 2018. Volatility forecasting: combinations of realized volatility measures and forecasting models. *Applied Economics* **50**, 13: 1428-1441.
- [4] Bollerslev T., Patton A.J., Quaadvlieg R. 2016. Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics* **192**, 1: 1-18.
- [5] Chan K.S., Tong H. 1986. On Estimating Thresholds In Autoregressive Models. *Journal of Time Series Analysis* **7**, 3: 179-190.
- [6] Corsi F. 2009. A Simple Approximate Long-Memory Model of Realized Volatility. *Journal of Financial Econometrics* **7**, 2: 174-196.
- [7] Dorsey R., Mayer W. 1995. Genetic algorithms for estimation problems with multiple optima, nondifferentiability, and other irregular features. *Journal of Business and Economic Statistics* **13**, 1: 53-66.
- [8] Dunn P., Smyth G. 1996. Randomized Quantile Residuals. *Journal of Computational and Graphical Statistics* **5**, 3: 236-244.
- [9] Galbraith J., Galbraith R. 1974. On the inverses of some patterned matrices arising in the theory of stationary time series. *Journal of Applied Probability* **11**: 63-71.
- [10] Glasbey C.A. 2001. Non-linear autoregressive time series with multivariate Gaussian mixtures as marginal distributions. *Journal of Royal Statistical Society: Series C* **50**, 2: 143-154.
- [11] Hamilton J.D. 1991. *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- [12] Han H., Park M.D., Zhang S. 2015. Multiplicative Error Model with Heterogeneous Components for Forecasting Realized Volatility. *Journal of Forecasting* **34**: 209-219.

- [13] Heber G., Lunde A., Shephard N., Shephard K. 2009. "Oxford-Man Institute's Realized Library vo.2", *Oxford Man Institute, University of Oxford*.
- [14] Gneiting T., Holzmann H., Munk A. 2006. Identifiability of finite mixtures of elliptical distributions. *Scandinavian Journal of Statistics* **33**: 753-763.
- [15] Kalliovirta L. 2012. Misspecification tests based on quantile residuals. *Econometrics Journal* **12**, 2: 358-393.
- [16] Kalliovirta L., Meitz M., Saikkonen P. 2015. A Gaussian Mixture Autoregressive Model for Univariate Time Series. *Journal of Time Series Analysis* **36**: 247-266.
- [17] Kalliovirta L., Meitz M., Saikkonen P. 2016. Gaussian mixture vector autoregression. *Journal of Econometrics* **192**: 485-498.
- [18] Koski T. 2013. Auxiliary notes for Time Series Analysis SF2943. Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology, Stockholm.
- [19] Lim K.S., Tong H. 1980. Threshold Autoregression, Limit Cycles and Cyclical Data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* **42**, 3: 245-292.
- [20] Li W.K., Wong C.S. 2000. On mixture autoregressive model. *Journal of the Royal Statistical Society* **62**: 95-115.
- [21] Li W.K., Wong C.S. 2001. On logistic mixture autoregressive model. *Biometrika* **88**, 3: 833-846.
- [22] Lýocsa Š., Molnár P. 2017. The effect of non-trading days on volatility forecasts in equity markets. *Finance Research Letters* **23**: 39-49.
- [23] Meitz M., Preve D., Saikkonen P. 2018. A mixture autoregressive model based on Students t-distribution. Julkaisematon käsikirjoitus.
- [24] Meitz M., Saikkonen P. 2017. Testing for observation-dependent regime switching in mixture autoregressive models. HECER, Discussion Paper No. 420.

- [25] Meyn S., Tweedie R. 2009. *Markov Chains and Stochastic Stability, second edition*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [26] Mikosch T., Straumann D. 2006. Quasi-Maximum-Likelihood Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series: a Stochastic Recurrence Equations Approach. *Annals of Statistics* **34**, 5: 2449-2495.
- [27] Nash J. 1990. *Compact Numerical Methods for Computers. Linear algebra and Function Minimization*. Adam Hilger.
- [28] Newey W.K., McFadden D. 1994. Large sample estimation and hypothesis testing. Luku 36 kirjassa Eagle R.F., MacFadden D.L. (toim.), *Handbook of Econometrics, Volume IV*. Elsevier Science B.V.
- [29] Palm F.C., Vlaar P.J.G. 1997. Simple diagnostic procedures for modeling financial time series. *Allgemeines Statistisches Archiv* **81**: 85-101.
- [30] Patnaik L., Srinivas M. 1994. Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation in Genetic Algorithms. *Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **24**, 4: 656-667.
- [31] Patton A.J. 2011. Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies. *Journal of Econometrics* **160**, 1: 246-256.
- [32] Patton A.J., Sheppard K. 2009. Evaluating Volatility and Correlation Forecasts. Kirjassa Andersen T.G., Davis R.A., Kreiss J.-P., Mikosch T.V. (toim.) *Handbook of Financial Time Series*: 801-838. Springer.
- [33] Redner R., Walker H. 1984. Mixture Densities, Maximum Likelihood and the Em Algorithm. *Society for Industrial and Applied Mathematics* **26**, 2: 195-239.
- [34] Rosenblatt M. 1952. Remarks on Multivariate Transformation. *Annals of Mathematical Statistics* **23**, 3: 470-472.
- [35] Roth M. 2013. On the multivariate t distribution. Technical Report, Linköping University.
- [36] Tierney L. 1994. Markov Chains for Exploring Posterior Distributions. *Annals of Statistics* **22**, 4: 1701-1728.

A Todistuksia

A.1 Stationaarinen jakauma ja ergodisuus

Johdetaan G-StMAR-malliin liittyvän prosessin $\mathbf{y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})$ stationaarinen jakauma, ja osoitetaan \mathbf{y}_t :n olevan ergodinen, samaan tapaan kuin Kalliovirta ym. (2015) sekä Meitz ym. (2018) ovat sen GMAR- sekä StMAR-mallille tehneet. Markovin ketjujen teoriaan liittyvässä käsitteistössä käytämme Meyn ja Tweedien (2009) esittämiä määritelmiä. Todistuksia varten käydään ensin läpi tarvittavia moniulotteisten normaali- ja t-jakaumien ominaisuuksia (Koski 2013 ja Roth 2013).

Normaali- ja t-jakauman ominaisuuksia

Tarkastellaan joko normaali- tai t-jakautuneen (ν :lla vapausasteella) satunnaisvektorin \mathbf{X} ositusta $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$, jonka komponenttien dimensiot ovat $(d_1 \times 1)$ ja $(d_2 \times 1)$ vastaavasti. Ositetaan samoin \mathbf{X} :n odotusarvovektori $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2)$ ja kovarianssimatriisi

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}_{11} & \boldsymbol{\Gamma}_{12} \\ \boldsymbol{\Gamma}'_{12} & \boldsymbol{\Gamma}_{22} \end{bmatrix},$$

jossa esimerkiksi $\boldsymbol{\Gamma}_{11}$:n dimensio on $(d_1 \times d_1)$. Tällöin t-jakautuneen \mathbf{X} :n tapauksessa \mathbf{X}_1 :lla ja \mathbf{X}_2 :lla on marginaalijakaumat $t_{d_1}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Gamma}_{11}, \nu)$ ja $t_{d_2}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Gamma}_{22}, \nu)$. Normaalisessa tapauksessa vastaavat marginaalijakaumat ovat $N_{d_1}(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Gamma}_{11})$ ja $N_{d_2}(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Gamma}_{22})$. Satunnaisvektorin \mathbf{X}_1 ehdollinen jakauma ehdolla $\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$ on t-jakauman tapauksessa

$$\mathbf{X}_1 \mid (\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2) \sim t_{d_1}(\boldsymbol{\mu}_{1|2}(\mathbf{x}_2), \boldsymbol{\Gamma}_{1|2}(\mathbf{x}_2), \nu + d_2), \quad (\text{A.1})$$

missä

$$\boldsymbol{\mu}_{1|2}(\mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \quad \text{ja} \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{1|2}(\mathbf{x}_2) = \frac{\nu - 2 + (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2)}{\nu - 2 + d_2}(\boldsymbol{\Gamma}_{11} - \boldsymbol{\Gamma}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}'_{12}). \quad (\text{A.3})$$

Normaalijakauman tapauksessa vastaava ehdollinen jakauma on

$$\mathbf{X}_1 \mid (\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2) \sim N_{d_1}(\boldsymbol{\mu}_{1|2}(\mathbf{x}_2), \boldsymbol{\Gamma}_{1|2}(\mathbf{x}_2)), \quad (\text{A.4})$$

missä

$$\boldsymbol{\mu}_{1|2}(\mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Gamma}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\mu}_2) \quad \text{ja} \quad (\text{A.5})$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{1|2}(\mathbf{x}_2) = \boldsymbol{\Gamma}_{11} - \boldsymbol{\Gamma}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_{12}'. \quad (\text{A.6})$$

Erityisesti moniulotteiselle t-jakaumalle pätee edellisten perusteella

$$t_d(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}, \nu) = t_{d_1}(\mathbf{x}_1; \boldsymbol{\mu}_{1|2}(\mathbf{x}_2), \boldsymbol{\Gamma}_{1|2}(\mathbf{x}_2), \nu + d_2) t_{d_2}(\mathbf{x}_2; \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Gamma}_{22}, \nu). \quad (\text{A.7})$$

Valitsemalla $d_1 = 1$, ja merkitsemällä $\varphi_{m,0} = \mu_m(1 + \boldsymbol{\Gamma}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}\mathbf{1}_p)$, $\boldsymbol{\varphi}_m = \boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_{12}'$ ja $\sigma_m^2 = \boldsymbol{\Gamma}_{11} - \boldsymbol{\Gamma}_{12}\boldsymbol{\Gamma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_{12}'$, voidaan huomata edellä esitettyjen tulosten vastaavuus tutkielman merkintöjen kanssa.

Stationaarinen jakauma

Oletetaan, että $\{y_t\}_{t=1}^\infty$ on G-StMAR-prosessi. Prosessi $\mathbf{y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})$ on tällöin Markovin ketju \mathbb{R}^p :ssä, sillä sen ehdollinen jakauma ehdolla prosessin koko historia riippuu vain sen edellisestä arvosta \mathbf{y}_{t-1} . Olkoon $\mathbf{y}_0 = (y_0, \dots, y_{-p+1})$ ($p \times 1$) satunnaisvektori, jonka jakauman tiheysfunktio on $f(\mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_m n_p(\mathbf{y}_0; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p}) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_m t_p(\mathbf{y}_0; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p}, \nu_m)$. Tässä tekstissä kovarianssimatriisiin $\boldsymbol{\Gamma}_m$ on liitetty alaindeksi p , koska myöhemmin käytetään vastaavaa $(p+1) \times (p+1)$ matriisia. Esitettyjen normaali- ja t-jakaumien ominaisuuksien sekä yhtälöiden (2.29) ja (2.31) nojalla y_1 :n ehdollinen tiheysfunktio ehdolla \mathbf{y}_0 on

$$\begin{aligned} f(y_1 \mid \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) &= \sum_{m=1}^{M_1} \frac{\alpha_m n_p(\mathbf{y}_0; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p})}{f(\mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})} n_1(y_1; \mu_{m,1}(\mathbf{y}_0), \sigma_m^2) \\ &+ \sum_{m=M_1+1}^M \frac{\alpha_m t_p(\mathbf{y}_0; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p}, \nu_m)}{f(\mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})} t_1(y_1; \mu_{m,1}(\mathbf{y}_0), \sigma_{m,1}^2(\mathbf{y}_0), \nu_m + p) \\ &= \sum_{m=1}^{M_1} \frac{\alpha_m}{f(\mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})} n_{p+1}((y_1, \mathbf{y}_0); \mu_m \mathbf{1}_{p+1}, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p+1}) \\ &+ \sum_{m=M_1+1}^M \frac{\alpha_m}{f(\mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})} t_{p+1}((y_1, \mathbf{y}_0); \mu_m \mathbf{1}_{p+1}, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p+1}, \nu_m). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Satunnaisvektorin $(y_1, \mathbf{y}_0) = (y_1, y_0, \dots, y_{-p+1})$ yhteistiheysfunktio on siis

$$\begin{aligned} f((y_1, \mathbf{y}_0); \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) &= f(y_1 | \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) f(\mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \\ &= \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_m n_{p+1}((y_1, \mathbf{y}_0); \mu_m \mathbf{1}_{p+1}, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p+1}) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_m t_{p+1}((y_1, \mathbf{y}_0); \mu_m \mathbf{1}_{p+1}, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p+1}, \nu_m). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Integroimalla yli y_{-p+1} :n saadaan moniulotteisten normaali- ja t-jakaumien marginaalijakaumien ominaisuuksien nojalla \mathbf{y}_1 :selle tiheysfunktio $f(\mathbf{y}_1; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_m n_p(\mathbf{y}_1; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p}) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_m t_p(\mathbf{y}_1; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p}, \nu_m)$.¹⁴ Satunnaisvektorit \mathbf{y}_0 ja \mathbf{y}_1 ovat siis samoin jakautuneita. Aikahomogeenisena Markovin ketjuna prosessilla $\{\mathbf{y}_t\}_{t=1}^\infty$ on täten stationaarinen jakauma $\pi_{\mathbf{y}}(\cdot)$ (Meyn ja Tweedie 2009, s.230-231), jonka tiheysfunktio on

$$f(\cdot; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=1}^{M_1} \alpha_m n_p(\cdot; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p}) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_m t_p(\cdot; \mu_m \mathbf{1}_p, \boldsymbol{\Gamma}_{m,p}, \nu_m). \quad (\text{A.10})$$

Ergodisuus

Olkoon $P_{\mathbf{y}}^p(\mathbf{y}, \cdot) = \mathbb{P}(\mathbf{y}_p \in \cdot | \mathbf{y}_0 = \mathbf{y})$ prosessin \mathbf{y}_t p :n askeleen siirtymätodennäköisyysmitta. Koska prosessi riippuu vain sen p :stä edeltävästä arvosta, saadaan $P_{\mathbf{y}}^p(\mathbf{y}, \cdot)$:n tiheysfunktiolle esitys

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_p | \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) &= f(y_p | \mathbf{y}_{p-1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) f(\mathbf{y}_{p-1} | \mathbf{y}_0; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \dots = \prod_{t=1}^p f(y_t | \mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \\ &= \prod_{t=1}^p \left(\sum_{m=1}^{M_1} \alpha_{m,t} n_1(y_t; \mu_{m,t}(\mathbf{y}_{t-1}), \sigma_m^2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_{m,t} t_1(y_t; \mu_{m,t}(\mathbf{y}_{t-1}), \sigma_{m,t}^2(\mathbf{y}_{t-1}), \nu_m + p) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

¹⁴Koska kovarianssimatriisilla $\boldsymbol{\Gamma}_{m,p+1}$ on Toeplitz-rakenne ja $\mu_m \mathbf{1}_p = (\mu_m, \dots, \mu_m)$, saadaan integroimalla pois halutut satunnaismuuttujat samoin marginaalijakaumat myös p :tä lyhyemmille satunnaisvektoreille, jotka ovat niin ikään myös sekoituksia normaali- ja t-jakaumista.

Selvästi edellä esitetty tiheysfunktio saa positiivisia¹⁵ arvoja kaikilla $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^p$ ja $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^p$, joten Markovin ketju \mathbf{y}_t voi p :llä askeleella päästä (positiivisella todennäköisyysmitalla) mihin tahansa sellaiseen tila-avaruutensa \mathbb{R}^p :n osajoukkoon, jonka Lebesguen mitta on positiivinen. Ketju \mathbf{y}_t on siten pelkistymätön ja palautuva, ja sen stationaarinen jakauma $\pi_{\mathbf{y}}(\cdot)$ on yksikäsitteinen (Meyn ja Tweedie 2009, kappale 4.2, s.230-231 ja lause 10.4.4). Lisäksi koska ketju \mathbf{y}_t voi yhtälailla myös $p + 1$:llä askeleella päästä mihin tahansa tila-avaruutensa positiivisen Lebesguen mitan osajoukkoon, on se myös jaksoton.

Määritellään Markovin ketju $\mathbf{y}_{t'}^p \in \mathbb{R}^p$, joka on kuin \mathbf{y}_t , mutta ottaa aina p -askelta kerrallaan siirtymätodennäköisyysmitan $P_{\mathbf{y}}^p(\mathbf{y}, \cdot)$ mukaisesti, ja saa arvoja ajanhetkinä $t' = tp$. Myös $\mathbf{y}_{t'}^p$ on pelkistymätön, palautuva ja jaksoton, sekä sillä on yksikäsitteinen stationaarinen jakauma $\pi_{\mathbf{y}}(\cdot)$ (Meyn ja Tweedie 2009, lause 10.4.5 ja propositio 5.4.5). Koska todennäköisyydet $P_{\mathbf{y}}^p(\mathbf{y}, A)$ ja $\pi_{\mathbf{y}}(A)$ ovat positiivisia jos ja vain jos joukon $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^p)$ Lebesguen mitta on positiivinen, pätee implikaatio $\pi_{\mathbf{y}}(A) = 0 \Rightarrow P_{\mathbf{y}}^p(\mathbf{y}, A) = 0$. Mitta $P_{\mathbf{y}}^p(\mathbf{y}, \cdot)$ on siis absoluuttisesti jatkuva $\pi_{\mathbf{y}}(\cdot)$:n suhteen, joten Tierneyn (1994) korollaarin 1 nojalla ketju $\mathbf{y}_{t'}^p$ on Harris palautuva. Täten Tierneyn (1994) lauseen 1 nojalla kaikilla $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ pätee $\|P_{\mathbf{y}}^{tp}(\mathbf{y}, \cdot) - \pi_{\mathbf{y}}(\cdot)\| \rightarrow 0$ kun $t \rightarrow \infty$, missä $\|\cdot\|$ tarkoittaa kokonaisvaihtelunormia. Koska $\|P_{\mathbf{y}}^t(\mathbf{y}, \cdot) - \pi_{\mathbf{y}}(\cdot)\|$ on Meyn ja Tweedien (2009) proposition 13.3.2 nojalla ei-kasvava t :ssä, pätee myös $\|P_{\mathbf{y}}^t(\mathbf{y}, \cdot) - \pi_{\mathbf{y}}(\cdot)\| \rightarrow 0$ kun $t \rightarrow \infty$. Markovin ketju \mathbf{y}_t on siis ergodininen siinä mielessä kun Meyn ja Tweedie (2009, kappale 13) sen määrittelevät. ■

A.2 Tarkentuvuus

Todistetaan G-StMAR-mallin SU-estimaattorin tarkentuvuus (tietäen oletuksien) vastaavasti kuin Kalliovirta ym. (2015) ovat sen GMAR-mallille ja Meitz ym. (2018) StMAR-mallille osoittaneet. Oletetaan, että todellinen parametriarvo $(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)$ on kompaktissa parametriavaruudessa $\boldsymbol{\Theta}$,¹⁶ ja että malli on identifioituva (liitteessä A.3 osoitetaan, että ehto (2.37) takaa identifioituvuuden). Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi lisäksi, että SU-estimaattori $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ saadaan maksimoimalla ehdollinen uskottavuusfunktio $L_T^{(c)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) =$

¹⁵Tarkoitamme positiivisuudella aitoa positiivisuutta.

¹⁶joka on luonnollisen parametriavaruuden $\{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \mathbb{R}^{M(2+p)} \times (0, 1)^{M-1} \times (2, \infty)^{M_2}, \sigma_m^2 > 0, m = 1, \dots, M, \text{ ehdot (2.2) ja (2.37) täyttyvät}\}$ osajoukko.

$\sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$, ja että alkuarvot ovat stationaarisia.¹⁷ Edeltävän oletuksen osalta yleisyyttä ei kuitenkaan menetetä, sillä ehdolliseen ja ehdottomaan uskottavuusfunktioon perustuvat SU-estimaattorit ovat asymptoottisesti yhtäpitäviä, yhtälön (2.35) ensimmäisen termin vaikutuksen hävitessä havaintomäärän kasvaessa rajatta.

Log-uskottavuusfunktio $L_T^{(c)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$ on jatkuva, ja malli oletetaan identifioituvaksi. Vahvan tarkentuvuus voidaan täten osoittaa näyttämällä, että ehdolliselle log-uskottavuusfunktiolle pätee tasainen vahva suurten lukujen laki, eli

$$\sup_{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \boldsymbol{\Theta}} \left| T^{-1} L_T^{(c)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) - E \left[T^{-1} L_T^{(c)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \right] \right| \rightarrow 0 \quad (\text{A.12})$$

melkein varmasti kun $T \rightarrow \infty$ (Newey ja McFadden 1994, s.2120-2123). Koska alkuarvot ovat generoituneet stationaarisesta jakaumasta, on prosessi $\mathbf{y}_t = (y_t, \dots, y_{t-p+1})$, ja siten myös y_t , stationaarinen ja ergodinen, ja $E \left[T^{-1} L_T^{(c)}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \right] = E [l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})]$ (Mikosch ja Straumann 2006, propositio 2.5). Mikoschin ja Straumannin (2006) lauseen 2.7 nojalla riittää vahvan tarkentuvuuden takaamiseksi näin ollen näyttää, että $E \left[\sup_{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \boldsymbol{\Theta}} |l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})| \right] < \infty$.

Parametriavaruuden rakenteen perusteella pätee $a \leq \sigma_m^2 \leq b$ ja $a \leq \alpha_m \leq 1 - a$ kaikilla $m = 1, \dots, M$ sekä $c \leq \nu_m \leq b$ kaikilla $m = M_1 + 1, \dots, M$, joillakin $0 < a < 1$, $b < \infty$ ja $c > 2$. Koska eksponenttifunktio on ei-positiivisten reaali lukujen joukossa rajoitettu ylhäältä ykkösellä, ja $\sigma_m^2 \geq a$, on olemassa vakio $B_1 < \infty$, jolle pätee

$$n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2) = (2\pi\sigma_m^2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{2\sigma_m^2} \right) \leq B_1 \quad (\text{A.13})$$

kaikilla $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \boldsymbol{\Theta}$ ja $m = 1, \dots, M_1$.

Lisäksi tiedetään, että $c \leq \nu_m + p \leq b + p$ kaikilla $m = M_1 + 1, \dots, M$, joten koska Gamma-funktio on jatkuva positiivisella reaaliakselilla, on olemassa

¹⁷Tuloksen voi odottaa yleistyvän myös ei-stationaarisille alkuarvoille, koska vahva suurten lukujen laki pätee pisteittäisesti myös yleisillä alkuarvoilla positiivisille Harris-ketjuille (Meyn ja Tweedie 2009, lause 17.1.7). Sen yleistäminen tasaiseksi vaatii kuitenkin todistuksen, mikä ei kuulu tämän tutkielman tavoitteisiin.

sellaiset vakiot $a_2 > 0$ ja $b_2 < \infty$, että

$$a_2 \leq C_1(\nu_m + p) = \frac{\Gamma\left(\frac{1+\nu_m+p}{2}\right)}{\sqrt{\pi}(\nu_m + p - 2)\Gamma\left(\frac{\nu_m+p}{2}\right)} \leq b_2 \quad (\text{A.14})$$

pätee kaikilla parametriavaruuteen Θ kuuluvilla vapausasteparametreilla ν_m . Koska positiivisesti definiitin matriisin käänteismatriisi on positiivisesti definiitti, ja $c \leq \nu_m \leq b$ sekä $\sigma_m^2 \geq a$, pätee

$$\sigma_{m,t}^2 = \frac{\nu_m - 2 + (\mathbf{y}_{t-1} - \mu_m \mathbf{1}_p)' \mathbf{\Gamma}_m^{-1} (\mathbf{y}_{t-1} - \mu_m \mathbf{1}_p)}{\nu_m - 2 + p} \sigma_m^2 \geq a_3 \quad (\text{A.15})$$

kaikilla $m = M_1 + 1, \dots, M$ ja jollakin $a_3 > 0$. Edellisten päätelmien sekä epäyhtälön $-(1 + \nu_m + p)/2 < 0$ perusteella on olemassa vakio $B_2 < \infty$, jolle pätee

$$t_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_{m,t}^2, \nu_m + p) = \frac{C_1(\nu_m + p)}{\sigma_{m,t}} \left(1 + \frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{(\nu_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2}\right)^{-(1+\nu_m+p)/2} \leq B_2 \quad (\text{A.16})$$

kaikilla $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \Theta$ ja $m = M_1 + 1, \dots, M$.

Epäyhtälöiden (A.13) ja (A.16) sekä rajoitteen $0 \leq \alpha_{m,t} \leq 1$ nojalla on siis edelleen olemassa sellainen vakio $B_3 < \infty$, että

$$l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \log \left(\sum_{m=1}^{M_1} \alpha_{m,t} n_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_m^2) + \sum_{m=M_1+1}^M \alpha_{m,t} t_1(y_t; \mu_{m,t}, \sigma_{m,t}^2, \nu_m + p) \right) \leq B_3 \quad (\text{A.17})$$

kaikilla $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \Theta$.

Parametriavaruuden Θ kompaktiutta hyödyntämällä tiedetään, että

$$\frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{2\sigma_m^2} \leq b_3(1 + y_t^2 + \mathbf{y}_{t-1}' \mathbf{y}_{t-1}),$$

eli

$$\exp \left\{ -\frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{2\sigma_m^2} \right\} \geq \exp \left\{ -b_3(1 + y_t^2 + \mathbf{y}_{t-1}' \mathbf{y}_{t-1}) \right\}, \quad (\text{A.18})$$

kaikilla $m = 1, \dots, M_1$ ja $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \Theta$, jollakin äärellisellä vakiolla b_3 . Vastaavasti koska $\sigma_{m,t}^2 \geq a_3$ ja $\nu_m \geq c$ tiedetään myös, että jollakin $b_4 < \infty$

pätee

$$1 + \frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{(\nu_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2} \leq b_4(1 + y_t^2 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}), \quad m = M_1 + 1, \dots, M.$$

Koska $\nu_m \leq b$, ja koska (seuraavassa) sisäfunktioit ovat suurempia kuin yksi, pätee siten myös

$$\left(1 + \frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{(\nu_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2}\right)^{-(1+\nu_m+p)/2} \geq (b_4(1 + y_t^2 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}))^{-(1+b+p)/2}. \quad (\text{A.19})$$

Kuten Meitz ym. (2018) täydennysliitteessä toteavat, pätee kaikilla $m = M_1 + 1, \dots, M$ ja jollakin $b_5 < \infty$ yhtälön (A.15) oikealla puolella olevalle neliömuodolle epäyhtälö

$$(\mathbf{y}_{t-1} - \mu_m \mathbf{1}_p)' \Gamma_m^{-1} (\mathbf{y}_{t-1} - \mu_m \mathbf{1}_p) \leq b_5(1 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}).$$

Koska lisäksi $0 < \nu_m - 2 \leq b$ ja $\sigma_m^2 \leq b$, on olemassa sellainen äärellinen vakio b_6 , että $\sigma_{m,t}^2 \leq b_6(1 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1})$ kaikilla $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \boldsymbol{\Theta}$ ja $m = M_1 + 1, \dots, M$, ja siten

$$(\sigma_{m,t}^2)^{-1/2} \geq (b_6(1 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}))^{-1/2} \quad \text{ja} \quad (\sigma_m^2)^{-1/2} \geq b^{-1/2}. \quad (\text{A.20})$$

Funktion $l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \log(g_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}))$ sisäfunktio $g_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$ (ks. yhtälö (A.17)) on sekoitussuhteilla painotettu summa yksiulotteisista normaali- ja t-jakaumien tiheysfunktioista, joiden lausekkeet on esitetty yhtälöissä (A.13) ja (A.16). Näiden tiheysfunktioiden logaritmit voidaan esittää niissä esiintyvien termien logaritmien summana. Edellä mainituille termeille on epäyhtälöissä (A.14), (A.18), (A.19) ja (A.20) esitetty nollaa suuremmat alarajat. Valitsemalla termien alarajoista pienimmät, kaikilla $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \boldsymbol{\Theta}$ pätee siten rajoitteen $\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} = 1$ perusteella

$$l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \geq \log(\min\{(2\pi)^{-1/2}, a_2\}) - \frac{1}{2} \log(\max\{b, b_6(1 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1})\}) - \Lambda(y_t, \mathbf{y}_{t-1}), \quad (\text{A.21})$$

missä

$$\Lambda(y_t, \mathbf{y}_{t-1}) = \max \left\{ b_3(1 + y_t^2 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}), \frac{1+b+p}{2} \log(b_4(1 + y_t^2 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1})) \right\}. \quad (\text{A.22})$$

Äärellisten toisten momenttien nojalla $E[y_t^2 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}] < \infty$, ja siten Jensenin epäyhtälön perusteella myös $E[\log(b_4(1 + y_t^2 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}))] < \infty$ ja $E[\log(b_6(1 + \mathbf{y}'_{t-1}\mathbf{y}_{t-1}))] < \infty$. Edellä esitettyjen odotusarvojen äärellisyyden sekä yhtälöiden (A.17), (A.21) ja (A.22) perusteella pätee $E[\sup_{(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \Theta} |l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})|] < \infty$. ■

A.3 Identifioituvuus

Jotta SU-estimaattorin $(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\nu}})$ vahva tarkentuvuus voidaan osoittaa näyttämällä toteen tasainen suurten lukujen laki (A.12), tulee mallin olla identifioituva. Käytännössä tämä tarkoittaa sitä, liitteen A.2 merkintöjä ja oletuksia (pl. identifioituvuus) käyttäen, että odotusarvon $E[l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})]$ tulee maksimoitua yksikäsitteisesti pisteessä $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)$ (Newey ja McFadden 1994, s.2120-2123). Osoitetaan siis, että $E[l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})] \leq E[l_t(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)]$, ja että yhtälöstä $E[l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})] = E[l_t(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)]$ seuraa

$$\boldsymbol{\vartheta}_m = \boldsymbol{\vartheta}_{\tau_1(m),0} \text{ ja } \alpha_m = \alpha_{\tau_1(m),0} \text{ kun } m = 1, \dots, M_1, \text{ ja}$$

$$(\boldsymbol{\vartheta}_m, \nu_m) = (\boldsymbol{\vartheta}_{\tau_2(m),0}, \nu_{\tau_2(m),0}) \text{ ja } \alpha_m = \alpha_{\tau_2(m),0} \text{ kun } m = M_1 + 1, \dots, M,$$

joillakin permutaatioilla $\{\tau_1(1), \dots, \tau_1(M_1)\}$ ja $\{\tau_2(M_1 + 1), \dots, \tau_2(M)\}$ vastaavasti.

Olkoon $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) \in \Theta$ mielivaltainen. Tarkastellaan seuraavaksi erotusta $E[l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})] - E[l_t(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)]$, ja otetaan merkintöjen lyhentämiseksi käyttöön yhtälössä (2.30) määritelty funktio $h_m(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$, sekä

$$h_m^1(y_t | \mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) := \begin{cases} n_1(y_t; \mu(\mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\vartheta}_m), \sigma_m^2(\boldsymbol{\vartheta}_m)), & \text{kun } m \in \{1, \dots, M_1\}, \\ t_1(y_t; \mu(\mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\vartheta}_m), \sigma_{m,t}^2(\mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\vartheta}_m, \nu_m)), \nu_m + p), & \text{kun } m \in \{M_1 + 1, \dots, M\}, \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

missä ehdolliset tiheysfunktio $n_1(\cdot; \cdot)$ ja $t_1(\cdot; \cdot)$ ovat kuten liitteessä A.1 (ehdollisen odotusarvon alaindeksit on jätetty pois merkintöjen lyhentämiseksi). Jätetään lisäksi sekoitussuhteiden $\alpha_{m,t}$ riippuvuus parametrasta $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$ sekä vektorista \mathbf{y}_{t-1} merkitsemättä, ja merkitään $\alpha_{m,0,t}$ llä todellisiin parametriarvoihin perustuvaa sekoitussuhdetta. Edellä esitettyjä merkintöjä käyttäen, liitteen A.1 perusteella satunnaisvektorin (y_t, \mathbf{y}_{t-1}) tiheysfunktio voidaan kir-

joittaa muodossa

$$f((y_t, \mathbf{y}_{t-1}); \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0) = \sum_{n=1}^M \alpha_{n,0} h_n(\mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0) \sum_{m=1}^M \alpha_{m,0,t} h_m^1(y_t | \mathbf{y}_{t-1}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0). \quad (\text{A.24})$$

Erotukselle $E[l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})] - E[l_t(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)]$ saadaan siten esitys

$$\begin{aligned} & \int \int f((y, \mathbf{y}); \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0) \log \left(\frac{\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})}{\sum_{m=1}^M \alpha_{m,0,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)} \right) dy d\mathbf{y} \\ &= \int \sum_{n=1}^M \alpha_{n,0} h_n(\mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0) \left[\int \sum_{m=1}^M \alpha_{m,0,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0) \right. \\ & \quad \times \log \left(\frac{\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})}{\sum_{m=1}^M \alpha_{m,0,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)} \right) dy \Big] d\mathbf{y}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Sisempi integraali on millä tahansa kiinnitetyllä $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ tiheysfunktioiden $\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})$ ja $\sum_{m=1}^M \alpha_{m,0,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)$ välinen negatiivinen Kullback-Leibler divergenssi. Kullback-Leibler divergenssin tunnettujen ominaisuuksien nojalla siis $E[l_t(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu})] - E[l_t(\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)] \leq 0$, missä yhtäsuuruus pätee jos ja vain jos

$$\sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,0,t} h_m^1(y | \mathbf{y}; \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0) \quad (\text{A.26})$$

melkein kaikilla $(y, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{p+1}$.

Kullakin kiinnitetyllä \mathbf{y} , yhtälössä (A.26) (ja (A.23)) sekoitussuhteet, ehdolliset odotusarvot sekä varianssit ovat vakioita, joten voimme hyödyntää Gneitingin ym. (2006, esimerkki 1) esittämää tulosta normaali- ja t-jakaumien¹⁸ (äärellisten) sekoitusten identifioituvuudesta. G-StMAR-mallin asteiden M_1 ja M_2 ollessa oikein spesifioitu, eivät sen GMAR- ja StMAR-komponentit voi sekoittua keskenään. Täten kullakin kiinnitetyllä \mathbf{y} on indeksijoukolle $\{1, \dots, M_1\}$ olemassa sellainen permutaatio $\{\tau_1(1), \dots, \tau_1(M_1)\}$ (joka voi riippua \mathbf{y} :stä), että

$$\alpha_{m,t} = \alpha_{\tau_1(m),0,t}, \quad \mu(\mathbf{y}; \boldsymbol{\vartheta}_m) = \mu(\mathbf{y}; \boldsymbol{\vartheta}_{\tau_1(m),0}) \text{ ja } \sigma_m^2(\boldsymbol{\vartheta}_m) = \sigma_m^2(\boldsymbol{\vartheta}_{\tau_1(m),0}) \quad (\text{A.27})$$

¹⁸Heidän t-jakauman parametrintointi eroaa hieman käyttämästämme, mutta tällä ei ole vaikutusta identifioituvuuteen.

melkein kaikilla $y \in \mathbb{R}$ ($m = 1, \dots, M_1$). Kullakin kiinnitetyllä \mathbf{y} on vastaavasti myös indeksijoukolle $\{M_1 + 1, \dots, M\}$ olemassa sellainen permutaatio $\{\tau_2(M_1 + 1), \dots, \tau_2(M)\}$ (joka voi myös riippua \mathbf{y} :stä), että

$$\begin{aligned} \nu_m &= \nu_{\tau_2(m),0}, \quad \alpha_{m,t} = \alpha_{\tau_2(m),0,t}, \quad \mu(\mathbf{y}; \boldsymbol{\vartheta}_m) = \mu(\mathbf{y}; \boldsymbol{\vartheta}_{\tau_2(m),0}) \\ \text{ja } \sigma_{m,t}^2(\mathbf{y}; \boldsymbol{\vartheta}_m, \nu_m) &= \sigma_{m,t}^2(\mathbf{y}; \boldsymbol{\vartheta}_{\tau_2(m),0}, \nu_{\tau_2(m),0}), \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

melkein kaikilla $y \in \mathbb{R}$ ($m = M_1 + 1, \dots, M$).

Kalliovirta ym. (2015) osoittavat GMAR-komponenttien osalta, että edellä esitettyjen päätelmien sekä yhtälön (A.27) seurauksena $\boldsymbol{\vartheta}_m = \boldsymbol{\vartheta}_{\tau_1(m),0}$ ja $\alpha_m = \alpha_{\tau_1(m),0}$ ($m = 1, \dots, M_1$). Vastaavasti Meitz ym. (2018) osoittavat StMAR-komponenttien osalta, että niin ikään myös edellä esitettyjen päätelmien sekä yhtälön (A.28) seurauksena $\boldsymbol{\vartheta}_m = \boldsymbol{\vartheta}_{\tau_2(m),0}$, $\nu_m = \nu_{\tau_2(m),0}$ ja $\alpha_m = \alpha_{\tau_2(m),0}$ ($m = M_1 + 1, \dots, M$). Koska identifiointivuusehto (2.37) kiinnittää komponenteille tietyn järjestyksen, seuraa siitä edellä mainittujen tulosten seurauksena yhtäläisyys $(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\nu}_0)$. ■

A.4 StMAR-mallin ehdollinen kertymäfunktio

Johdetaan StMAR-mallin muotoa

$$F(y_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \int_{-\infty}^{y_t} f_m(u_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1}) du_t \quad (\text{A.29})$$

oleva ehdollinen kertymäfunktio ratkaisemalla siinä esiintyvä integraali. Tätä varten tarvitaan Ernst Kummerin johtama integraaliesitys (Aomoto ja Kita 2011, kappale 1.3.1) hypergeometriselle funktiolle

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 s^{a-1} (1-s)^{c-a-1} (1-sx)^{-b} ds, \quad (\text{A.30})$$

missä $\Gamma(\cdot)$ on gamma-funktio, $|x| < 1$, $a > 0$ ja $c - a > 0$ (kun a ja c ovat reaalityyppisiä).

StMAR-komponentin ehdollisen tiheysfunktion määritelmän (2.21) sekä t-jakauman symmetrisyyden nojalla saadaan

$$\int_{-\infty}^{y_t} f_m(u_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1}) du_t = \frac{1}{2} + \int_{\mu_{m,t}}^{y_t} f_m(u_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1}) du_t, \quad (\text{A.31})$$

kun $y_t \geq \mu_{m,t}$. Tapauksessa $y_t < \mu_{m,t}$ integrointirajat vaihdetaan päittäin, mutta jakauman symmetrisyydestä johtuen integraali on kuitenkin sama. Yhtälön (A.31) oikea puoli voidaan muuttujanvaihdolla $\tilde{u}_{m,t} := u_t - \mu_{m,t}$ esittää muodossa

$$\frac{1}{2} + C_1(\nu_m + p)\sigma_{m,t}^{-1} \int_0^{y_t - \mu_{m,t}} \left(1 + \frac{\tilde{u}_{m,t}^2}{(\nu_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2}\right)^{-(1+\nu_m+p)/2} d\tilde{u}_{m,t}. \quad (\text{A.32})$$

Merkintöjen lyhentämiseksi otetaan käyttöön merkinnät

$$q := y_t - \mu_{m,t}, \quad A := (\nu_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2 \text{ ja } B := (1 + \nu_m + p)/2. \quad (\text{A.33})$$

Tehdään lisäksi muuttujanvaihto $z_{m,t} := \tilde{u}_{m,t}^2/q$, jolloin lausekkeen (A.32) integraalille saadaan esitys

$$\int_0^q \left(1 + \frac{\tilde{u}_{m,t}^2}{A}\right)^{-B} d\tilde{u}_{m,t} = \frac{1}{2} \int_0^q \left(\frac{q}{z_{m,t}}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{z_{m,t}q}{A}\right)^{-B} dz_{m,t}. \quad (\text{A.34})$$

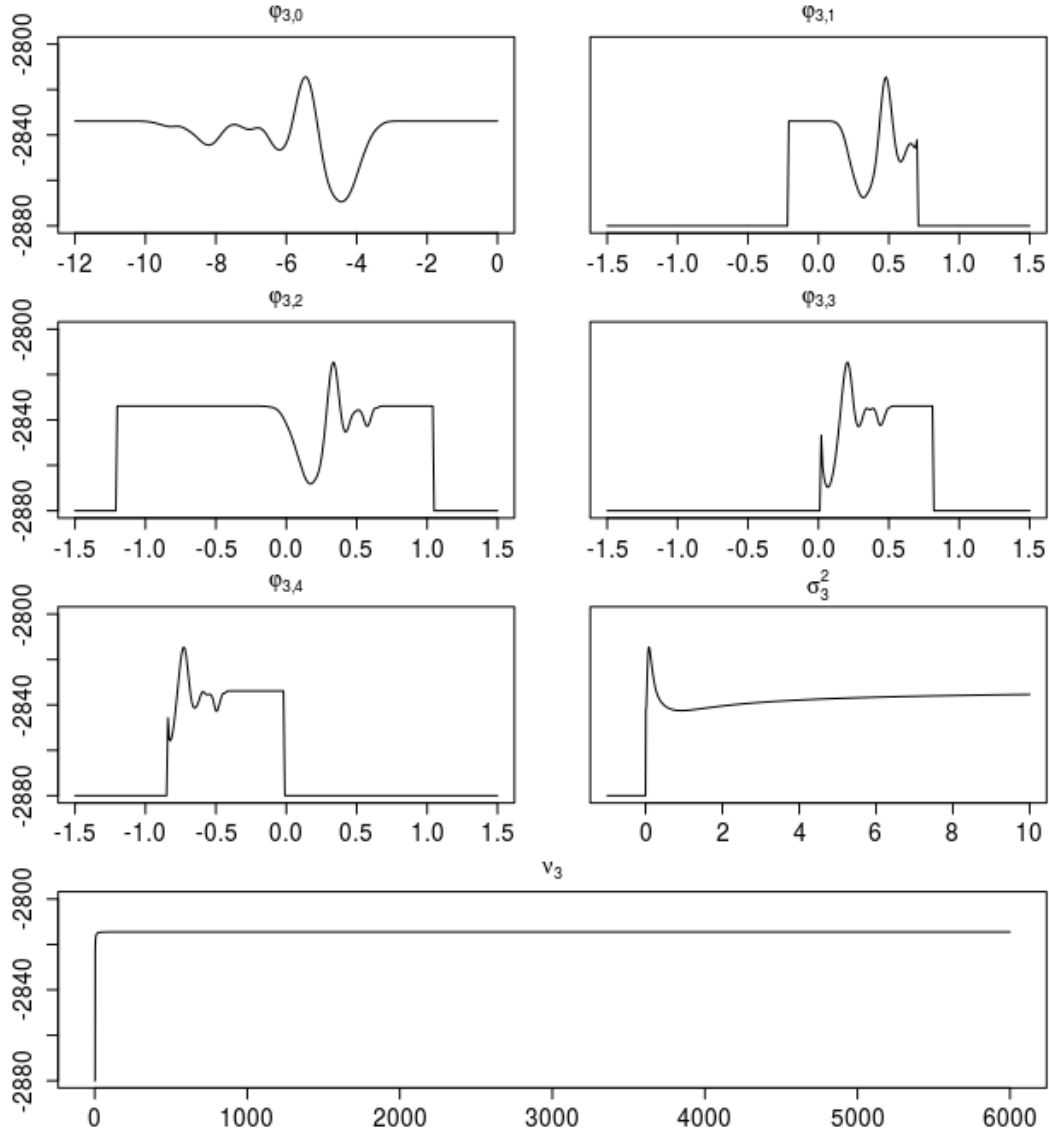
Tekemällä vielä kolmas muuttujan vaihto $s_{m,t} := z_{m,t}/q$, voidaan edellisen yhtälön jälkimmäinen lauseke esittää hypergeometrisen funktion avulla

$$\frac{q}{2} \int_0^1 s_{m,t}^{-1/2} \left(1 - s_{m,t} \left(-\frac{q^2}{A}\right)\right)^{-B} ds_{m,t} = q \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, B, \frac{3}{2}; -\frac{q^2}{A}\right). \quad (\text{A.35})$$

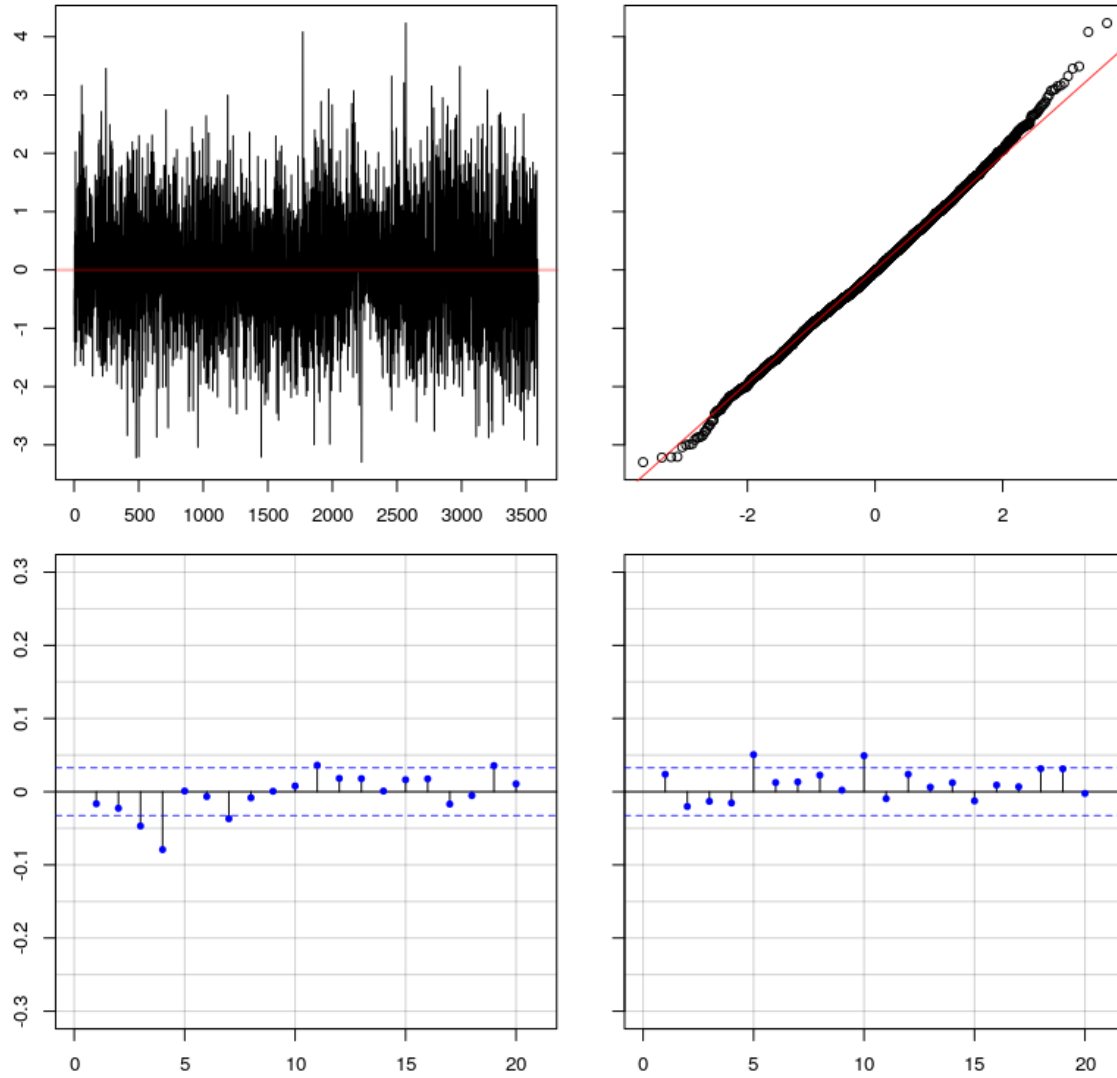
Sijottamalla edellä johdettu tulos lausekkeeseen (A.32), saadaan epäyhtälön $(y_t - \mu_{m,t})^2 < (v_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2$ pätiessä StMAR-mallin ehdolliseksi kertymäfunktioksi

$$\begin{aligned} F(y_t; \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\nu} \mid \mathcal{F}_{t-1}) &= \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \int_{-\infty}^{y_t} f_m(u_t; \boldsymbol{\theta} \mid \mathcal{F}_{t-1}) du_t \\ &= \sum_{m=1}^M \alpha_{m,t} \left(\frac{1}{2} + C_1(v_m + p)\sigma_{m,t}^{-1}(y_t - \mu_{m,t}) \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1 + v_m + p}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{(y_t - \mu_{m,t})^2}{(v_m + p - 2)\sigma_{m,t}^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

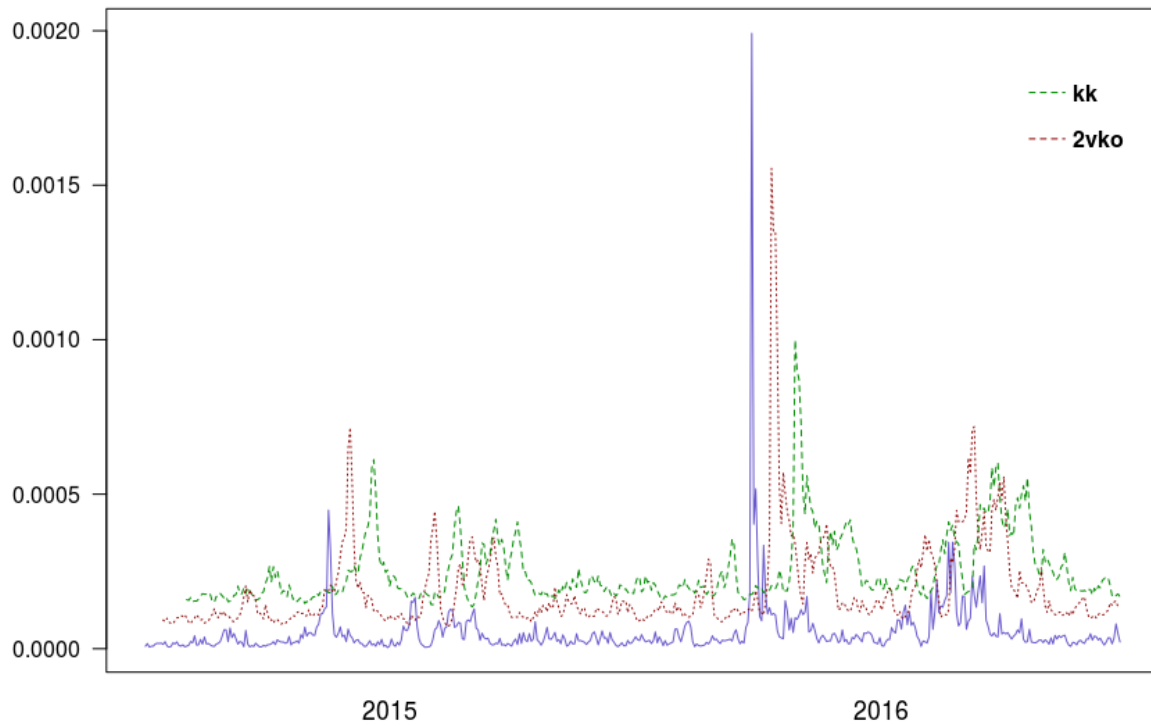
B Täydentävää kuvamateriaalia



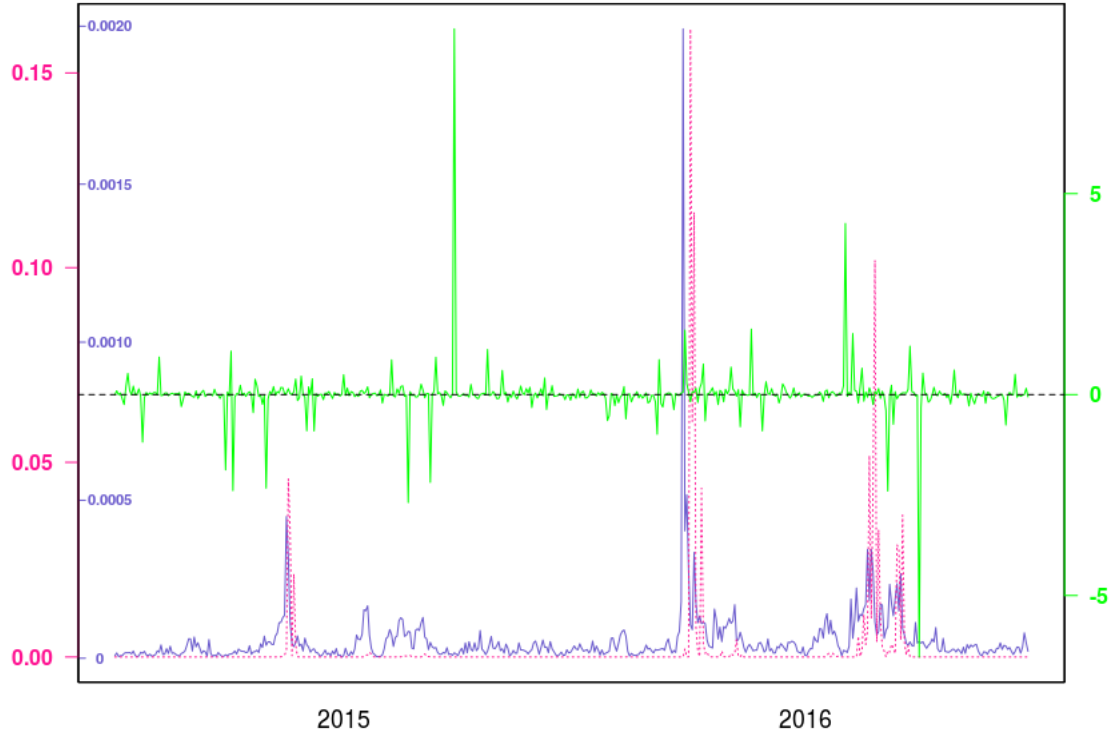
Kuva 3: Logaritmoituun S&P 500 dataan estimoidun StMAR(4,3)-mallin kolmannen komponentin parametrien profiiluskottavuusfunktioiden kuvaajat, jotka on piirretty siten, että muut parametriarvot pysyvät oletetun SU-estimaatin mukaisina vakioina. Log-uskottavuusfunktion arvo -2880 tarkoittaa tässä kuvassa sitä, että vastaava parametriarvo on parametriavaruuden ulkopuolella.



Kuva 4: G-StMAR(4,1,1)-mallin kvantiiliresiduaalien aikasarja (vas. ylh.), standardinormaalijakaumaan perustuva kvantiilikuva (oik. ylh.) ja kvantiiliresiduaalien ja niiden neliöiden autokorrelaatiofunktio (vas. alh. ja oik. alh. vastaavasti) yhdessä suuntaa antavien 95% luottamusrajojen kanssa.



Kuva 5: Ennustamiseen käytetty aikasarja (violetti) yhdessä G-StMAR(4,1,1)-mallin 22 askeleen (kk, vihreä) ja 10 askeleen (2vko, punainen) 95%-väliennusteen kanssa.



Kuva 6: Logaritmoitu QLIKE:en perustuva G-StMAR(4, 2, 1)-mallin suhteellinen yhden askeleen ennustevirhe suhteessa G-StMAR(4, 1, 1)-malliin (vihreä) yhdessä StMAR(4, 2, 1)-mallin toisen regiimin sekoitussuhteiden (pinkki) ja ennustamiseen käytetyn aikasarjan (violetti) kanssa. Nollaa pienempi logaritmoidun suhteellisen ennustevirheen arvo viittaa siihen, että G-StMAR(4, 2, 1)-mallin ennuste on tarkempi, ja nollaa suurempi siihen, että se on epätarkempi.